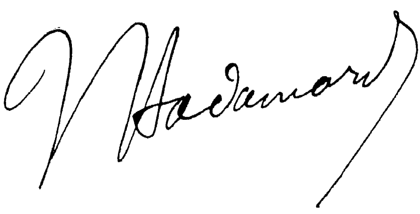


Photo
G. L. Manuel frères



SELECTA

JUBILÉ SCIENTIFIQUE

DE

M. Jacques HADAMARD

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1935

Au savant illustre qui a ouvert à la recherche mathématique des routes nouvelles et sûres et dont le labeur incessant s'est affirmé dans de vastes domaines,

Au maître éminent dont le dévouement inépuisable a encouragé et guidé tant d'efforts,

A l'homme de bien à qui aucune inquiétude humaine n'a paru étrangère,

Ses admirateurs, ses amis, ses élèves offrent ce recueil de quelques-uns de ses travaux, image d'une œuvre magnifique et féconde.

FONCTIONS ANALYTIQUES

ESSAI

SUR

L'ÉTUDE DES FONCTIONS DONNÉES

LEUR DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

(Extrait du *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII, 1892.)

INTRODUCTION.

Le développement de Taylor rend d'importants services aux mathématiciens, en raison de sa grande généralité. Lui seul, en effet, permet de représenter une fonction analytique quelconque, à certains cas singuliers près.

Depuis les travaux d'Abel et de Cauchy, on sait qu'à toute fonction régulière dans un certain cercle correspond un développement de Taylor, et réciproquement. C'est même ce développement que M. Weierstrass, et, en France, M. Méray, emploient pour définir la fonction.

Un point a étant donné au hasard, on pourra, en général, former une série ordonnée suivant les puissances entières et positives de $x - a$ et qui représentera notre fonction dans le voisinage du point a. Il pourra y avoir exception pour certaines positions parti-

culières du point a. C'est à ces points particuliers que l'on donne le nom de *points singuliers*.

On peut donc dire que se donner une fonction analytique non singulière au point $x = 0$, c'est se donner une suite de coefficients a_1, a_2, ..., a_m, ..., tels que la série $\sum a_m x^m$ ne soit pas toujours divergente. Cette série donnera la fonction dans l'intérieur de son cercle de convergence, et d'ailleurs une fonction ainsi donnée est parfaitement déterminée, si du moins, avec la valeur de la variable, on se donne le chemin par lequel on y aboutit.

C'est, par exemple, sous cette forme que le théorème de Briot et Bouquet fournit les intégrales d'un système d'équations différentielles.

Mais, si ce mode de représentation est très utile pour démontrer l'existence des intégrales, son emploi est très limité au point de vue de l'étude de ces mêmes intégrales. Le développement de Taylor, en effet, ne met pas en évidence les propriétés de la fonction représentée et semble même les masquer complètement.

Cependant, on connaît déjà des circonstances où ce développement peut fournir de précieux renseignements difficiles à obtenir par d'autres moyens. On sait, en effet, les remarquables propriétés arithmétiques démontrées par Eisenstein et M. Tchebicheff sur les séries qui représentent des fonctions algébriques ou exprimables par la combinaison de fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires en nombre fini.

J'ai étudié la question à un point de vue différent, celui qu'indique la théorie générale des fonctions, et d'après lequel le premier problème qui se pose est la recherche des points singuliers. Ce problème est d'ailleurs intimement lié à celui de la continuation de la fonction en dehors du cercle de convergence.

Le développement de Taylor ne définit une fonction qu'à l'intérieur d'un certain cercle, à savoir le plus petit qui ait pour centre l'origine et qui passe par un ou plusieurs points singuliers. Si a désigne l'affixe d'un point situé sur le rayon qui va de l'origine à un de ces points singuliers, en ordonnant notre série, non plus suivant les puissances de x, mais suivant celles de $x - a$, le cercle de convergence de cette nouvelle série sera compris entièrement dans l'ancien.

Il n'en sera pas de même si le rayon qui va de l'origine au point $x = a$ coupe la circonférence primitive en un point ordinaire, et, dans ce cas, la nouvelle série permettra de calculer la fonction pour des valeurs de x qui rendaient l'ancienne divergente. Si l'on veut étudier le prolongement de la fonction en dehors du cercle de convergence, il est donc important de déterminer les points critiques situés sur ce cercle. C'est cette détermination qui fait le principal objet du présent travail.

Il existe, à cet égard, une Note de M. Lecornu, insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1). D'après M. Lecornu, l'affixe du point singulier est la limite vers laquelle tend le rapport de deux coefficients consécutifs, lorsqu'on s'éloigne de plus en plus dans la série. Malheureusement, la démonstration donnée par l'auteur est défectueuse, et nous verrons qu'il y a de grandes réserves à faire sur le théorème lui-même.

Quant à la méthode qui m'a servi dans cette recherche, les principes sur lesquels elle repose sont ceux qu'a employés M. Darboux dans son Mémoire bien connu : *Sur l'approximation des fonctions de grands nombres* (2), dans un but inverse, il est vrai. Partant de certaines séries dont les points singuliers sont connus, M. Darboux en tire des conclusions relatives aux coefficients de ces séries. Mais le principe fondamental du Mémoire, énoncé par son auteur de la façon suivante : « La recherche de la partie principale des coefficients de la série dépend de la manière dont la fonction devient infinie sur le cercle de convergence », est celui-là même qui peut servir à l'étude des points singuliers.

J'ai divisé ce travail en trois Parties :

Dans la première, après avoir introduit une notion préliminaire indispensable pour la suite, je détermine d'une façon générale le rayon de convergence. Les résultats obtenus conduisent immédiatement à un critérium permettant de reconnaître dans certains cas la présence d'un ou plusieurs points singuliers.

La deuxième Partie est consacrée à l'étude des discontinuités polaires. Lorsque la fonction n'a sur le cercle de convergence que de

---

(1) Séance du 7 février 1887.

(2) *Journal de Liouville*, 3e série, t. IV.

telles discontinuités, on peut la prolonger analytiquement et la représenter dans tout cercle où elle est méromorphe.

Dans la troisième Partie, je définis ce qu'on peut appeler *l'ordre* d'une fonction sur son cercle de convergence et en un point de ce cercle, et j'étudie les points singuliers en les classifiant d'après leur ordre. Lorsque cet ordre reste fini, on peut, dans des cas assez étendus, trouver les points singuliers, et dans tous les cas, calculer la fonction en tout point ordinaire du cercle de convergence (1).

PREMIÈRE PARTIE.

1. Nous aurons à nous fonder, dans ce qui va suivre, sur quelques principes simples relatifs aux suites infinies, et que je vais résumer tout d'abord.

Soit la suite

où $u_0, u_1, \ldots, u_m, \ldots$ désignent des nombres réels, mais quelconques d'ailleurs.

Il peut arriver, comme premier cas, que cette suite renferme des termes supérieurs à tout nombre donné; ou encore, que tous les termes aillent en augmentant indéfiniment par valeurs négatives.

Écartons pour le moment ces deux hypothèses. Nous voyons qu'il y aura lieu de répartir les nombres réels, d'après leurs relations de grandeur avec les quantités u_m d'indice très grand, en deux catégories. Un nombre A sera mis dans la classe supérieure si, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (1) sont plus petits que A; au contraire, un nombre B appartiendra à la classe inférieure si notre suite contient des termes de rang aussi éloigné qu'on veut, et qui surpassent B.

Si A est un nombre de la classe supérieure, il est clair que tous les

(1) Plusieurs des résultats contenus dans le présent travail ont été communiqués à l'Académie des Sciences (séances du 23 janvier 1888 et du 8 avril 1889).

[Note du Comité de Rédaction : le manque de place ne nous a pas permis de réimprimer cette troisième partie].

nombres supérieurs à A appartiennent à la même classe; pareillement, si le nombre B fait partie de la classe inférieure, on peut en dire autant de tous les nombres moindres que B.

Or, c'est un fait bien connu que, dans ces conditions, il existe un nombre l servant de séparation entre les deux classes, en sorte que la première se compose des nombres plus grands que l; la seconde, des nombres plus petits que l (¹). Pour déterminer ce nombre, on pourra, par exemple, commencer par faire prendre à un entier la série des valeurs depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Il arrivera un moment où cet entier variable passera de la classe inférieure dans la supérieure. Soient a_1 et a_1+1 les deux nombres entiers consécutifs qui appartiennent ainsi à des catégories différentes. On divisera l'intervalle (a_1, a_1+1) en n parties égales et l'on trouvera deux nouveaux nombres a_2, $a_2+\frac{1}{n}$, différant de $\frac{1}{n}$ et dont l'un est un nombre B, l'autre un nombre A. On partage l'intervalle compris entre ces deux nombres en n parties égales; et poursuivant ainsi indéfiniment, on formera une série d'intervalles compris les uns dans les autres et de plus en plus petits. D'après un théorème connu, les nombres obtenus par ce procédé sont les valeurs approchées d'une même quantité, laquelle répond manifestement à notre objet.

Cette quantité l, telle que, pour toute valeur positive de ε, $l+\varepsilon$ appartienne à la classe supérieure et $l-\varepsilon$ à la classe inférieure, sera dite la *limite supérieure* de la suite (1) *pour m infini*, ou simplement la *limite supérieure* (²).

Dans le cas précédemment exclu, où une partie des termes de la suite (1) augmenterait indéfiniment par valeurs positives, ou bien encore lorsque tous iraient en augmentant indéfiniment par valeurs

(¹) Les mots *plus petits que*, *plus grands que* n'excluent pas ici l'égalité.

(²) On pourrait être tenté de prendre les mots *limite supérieure* dans le sens qui leur est attribué en d'autres occasions (notamment lorsqu'on traite des fonctions d'une variable réelle) et qui est un peu différent de celui-ci. En effet, il faudrait alors ne ranger un nombre dans la classe supérieure que lorsqu'il est plus grand que *tous* les termes de la suite (1), et non pas seulement que les termes d'indice suffisamment élevé.

Nous serons donc obligé, lorsqu'on aurait à craindre une confusion, d'employer la locution *limite supérieure pour m infini*, qui ne peut prêter à aucune ambiguïté.

négatives, l'une de nos deux catégories disparaîtrait et la définition précédente tomberait en défaut. La limite supérieure devrait être regardée comme égale à $+\infty$ dans le premier cas, à $-\infty$ dans le second.

2. ε désignant toujours un nombre positif aussi petit qu'on veut, il existe des quantités u_m, d'indice aussi élevé qu'on le voudra, comprises entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$, puisque, d'après la définition même de l, la suite donnée contient des termes indéfiniment éloignés supérieurs à $l-\varepsilon$, au lieu qu'à partir d'un certain rang elle n'en renferme plus de supérieur à $l+\varepsilon$. Donc *on peut, dans la suite* (1), *trouver une suite partielle qui ait pour limite* l. Bien entendu, il s'agit ici d'une limite, absolument parlant, et non plus seulement d'une limite supérieure telle que nous venons de la définir [1].

Il peut même se trouver, comme cas particulier, que u_m s'approche indéfiniment de l pour *toutes* les valeurs de m suffisamment grandes. Il en est ainsi, d'après la remarque précédente, lorsque, si petit que soit ε, l'inégalité $u_m > l-\varepsilon$ est vérifiée, à partir d'un certain rang, pour toutes les valeurs de m et non pas seulement pour une infinité d'entre elles. l devient alors pour la suite (1) une véritable limite, au sens ordinaire du mot. Dans ce cas, il nous arrivera de dire que les termes de la suite (1) *tendent régulièrement vers* l. Cette locution, dont à la rigueur on pourrait se passer, aura l'avantage de bien marquer, sans allonger le discours, la différence qui existe entre ce cas particulier et le cas général.

Si la suite donnée est à termes positifs, elle ne peut avoir 0 comme limite supérieure sans tendre régulièrement vers cette limite. Car u_m est supérieur à $-\varepsilon$, quel que soit m.

Nous remarquerons encore que la limite supérieure d'une suite

[1] La notion de limite supérieure que nous introduisons ici est en relation avec la théorie des ensembles.

On sait que M. Cantor définit un *ensemble dérivé* dont fait partie toute quantité q telle que l'ensemble primitif contienne une infinité de termes aussi voisins qu'on le veut de q.

Dans cette terminologie, notre limite supérieure serait le plus grand élément de l'ensemble dérivé.

n'est pas altérée lorsqu'on augmente ou diminue les termes de quantités infiniment petites pour m infini.

3. Au lieu de considérer des quantités u_m dépendant d'un seul indice, on peut introduire des quantités $u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$, où figurent p indices indépendants $m_1, m_2, \ldots, m_p$ variables de o à $+\infty$, et définir d'une façon tout analogue la limite supérieure de $u_{m_1, m_2, \ldots, m_p}$, pour $m_1 = m_2 = \ldots = m_p = \infty$. On formera, à cet effet, les deux classes supérieure et inférieure d'après la règle suivante : un nombre A sera rangé dans la première s'il est supérieur à toutes les quantités u dont les indices $m_1, m_2, \ldots, m_p$ dépassent tous un entier N convenablement choisi ; un nombre B sera placé dans la seconde lorsqu'on pourra trouver des u plus grands que B et dont les indices soient tous supérieurs à tel entier qu'on voudra (¹).

4. La notion de limite supérieure va nous permettre de déterminer tout d'abord le rayon de convergence d'une série de Taylor, et de résoudre ainsi d'une façon générale le problème traité par M. Lecornu (²) dans le cas où le rapport de deux coefficients consécutifs a une limite.

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots \tag{2}$$

une série ordonnées suivant les puissances croissantes de x. Nous envisagerons la suite à termes positifs

$$|a_1|, \quad |\sqrt{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots \tag{3}$$

Si cette dernière suite contient des termes augmentant indéfiniment, la série donnée n'est jamais convergente, quelle que soit la

(¹) On sait (*voir* CANTOR, *Journal de Borchardt*, t. 84, p. 242) que l'on peut ramener le cas d'un ensemble à p indices au cas d'un ensemble à indice unique. Il est à remarquer que cette assimilation ne s'applique pas dans la question actuelle. La méthode de M. Cantor oblige effectivement à donner un rang élevé à tout terme dans lequel un au moins des indices est très grand, au lieu que nous ne devons considérer comme infiniment éloignés que les termes dans lesquels *tous* les p indices auront de très grandes valeurs.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 7 février 1887.

variable x. Car il existera toujours des valeurs de m en nombre infini pour chacune desquelles, $|\sqrt[m]{a_m}|$ étant plus grand que $\frac{1}{|x|}$, le terme correspondant $a_m x^m$ aura un module supérieur à 1.

5. Ce cas doit donc être laissé de côté, et nous devons supposer que *la suite* (3) *admet une limite supérieure* l.

Donnons à x un module plus petit que $\frac{1}{l}$, soit $\frac{1}{l+\varepsilon}$. Par hypothèse, $l+\frac{\varepsilon}{2}$ appartient à la classe supérieure par rapport à la suite (3). Donc, à partir d'un certain rang, chaque quantité $|a_m|$ est plus petite que $\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)^m$ et le module de $\sqrt[m]{a_m x^m}$ est (et reste) inférieur à $\frac{l+\frac{\varepsilon}{2}}{l+\varepsilon}$, nombre fixe plus petit que 1, ce qui montre que la série $\sum a_m x^m$ est convergente.

Au contraire, si nous donnions à x un module $\frac{1}{l-\varepsilon}$ plus grand que $\frac{1}{l}$, comme nous savons que, pour une infinité de valeurs de m, $|a_m|$ est supérieur à $(l-\varepsilon)^m$, la série $\sum a_m x^m$ aurait une infinité de termes plus grands que 1 : ce serait une série divergente.

Si, en particulier, le rapport $\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|}$ tend vers une limite, $|\sqrt[m]{a_m}|$ aura la même limite, qui sera bien par conséquent, ainsi que l'avait énoncé M. Lecornu, l'inverse du rayon de convergence.

Au lieu de $|\sqrt[m]{a_m}|$, nous aurions pu considérer [1] l'expression $\frac{1}{m}\,\mathrm{L}|a_m|$, qui est le logarithme de la précédente. La limite supérieure de cette nouvelle quantité, pour m infini, aurait donné le logarithme de l.

6. Un cas important est celui où la quantité l est nulle, et où, par suite, $|\sqrt[m]{a_m}|$ tend vers 0, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 2. En ce cas, pour toute valeur attribuée à x, notre série est

(1) $\mathrm{L}|a_m|$ désigne, comme d'habitude, le logarithme népérien de $|a_m|$.

convergente ; car (en désignant par k un nombre quelconque plus petit que 1) à partir du moment où l'on aura $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{k}{|x|}$, le terme général sera inférieur à k^m, c'est-à-dire au terme général d'une série absolument convergente.

La fonction $f(x)$ est donc une fonction holomorphe dans toute l'étendue du plan.

7. Ainsi, lorsque notre limite supérieure est infinie, le développement donné ne définit aucune fonction. Lorsqu'elle est nulle, il définit une fonction entière et permet de la calculer pour toute valeur de la variable.

Au contraire, si la limite supérieure l est finie et différente de 0, le développement (2) définit une fonction $f(x)$, mais n'en fournit d'expression que pour les valeurs de x intérieures au cercle de convergence. Le problème qui se pose actuellement est donc l'étude de cette fonction en dehors du cercle ou sur le cercle, et tout d'abord la détermination des points critiques situés sur la circonférence.

Dans les fonctions les plus simples, telles que $\frac{1}{(\alpha - x)^p}$, par exemple, l'affixe du point singulier s'obtient en prenant la limite du rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$. On peut donc se demander s'il est possible d'énoncer ce résultat sous forme de théorème général.

Pour discuter cette proposition, il est nécessaire d'en préciser la signification. Prise dans son acception la plus étendue, elle voudrait dire que pour toute série où le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ a une limite, le point correspondant est le seul point singulier situé sur le cercle de convergence. Ainsi comprise, la proposition est manifestement fausse : elle ne s'applique pas, par exemple, à la fonction

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

La réciproque est également inexacte : x_0 peut être point singulier unique d'une fonction représentée par la série (2), sans que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tende vers x_0, ainsi que nous en rencontrerons un exemple dans la suite.

Au contraire, lorsque le rapport des coefficients consécutifs tend vers une limite, le point qui a cette limite pour affixe paraît être, en général, *un* point singulier. En tout cas, nous pouvons établir une conclusion très voisine de celle-là.

8. Les résultats précédents nous fournissent en effet un premier critérium permettant de reconnaître les points critiques.

Soit $x = x_0$ un point pris sur le cercle de convergence, et proposons-nous de rechercher si ce point est ordinaire ou singulier.

Nous pouvons d'abord supposer $x_0 = 1$, car nous pourrions ramener le cas général à celui-là par le changement de variable.

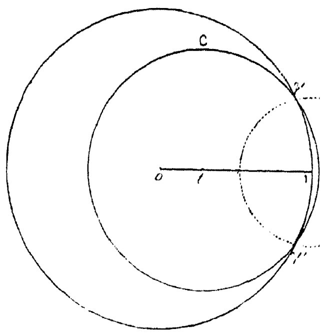
(4) $$x = x_0 y,$$

dans lequel, à la valeur x_0 donnée à x, correspondrait pour y la valeur $y = 1$.

Soit alors t un nombre réel compris entre 0 et 1, auquel correspond un point de l'axe réel (*fig.* 1). Le rayon de convergence de la série

(5) $$m!$$

Fig. 1.



sera le rayon du plus grand cercle C décrit du point t comme centre et où la fonction donnée f sera régulière.

Si le point $x = 1$ est point ordinaire, notre fonction sera holomorphe dans un cercle c ayant pour centre ce point $x = 1$, et qui coupera le cercle primitif en deux points γ et γ', par conséquent

aussi dans un cercle de centre t et d'un rayon égal à la distance des deux points t et γ, laquelle est supérieure à $1 - t$.

Si, au contraire le point $x = 1$ est un point critique, le cercle C devra passer par ce point et avoir pour rayon $1 - t$.

Reportons-nous maintenant aux résultats obtenus relativement au rayon de convergence : nous voyons que la condition nécessaire et suffisante pour que le point $x = 1$ soit singulier sera fournie par l'inégalité [1]

(6) $$1 - \varepsilon$$

laquelle devra être vérifiée, si petit que l'on ait pris ε, pour une infinité de valeurs de m.

9. Mettons en évidence le module et l'argument de chaque coefficient a, autrement dit posons

L'inégalité (6) (élevée au carré) pourra s'écrire

(6′) $$g_m^2 + 2(m+1)t\,g_m g_{m+1}\cos(\alpha_{m+1} - \alpha_m) + \dots$$

$$> 1 + 2mt + \frac{2m(2m+1)}{2}t^2 + \dots + C^h_{2m+h-1}t^h$$

les lettres C désignant, comme à l'ordinaire, des coefficients binomiaux.

Cette forme donnée à l'inégalité (6) permet de trouver des cas particuliers assez étendus où elle est vérifiée.

Remarquons d'abord que la somme $\sum_{k=0} C^k_{m+h} C^{h-k}_{m+h-k}$ est égale à C^h_{2m+h+1}. Ceci se reconnaît immédiatement en supposant que la

Il n'y a pas lieu d'écrire l'inégalité

$$\frac{1+\varepsilon}{1-t}$$

car le rayon de convergence de la série (5) ne saurait être inférieur à $1 - t$.

fonction f soit la fonction $\frac{1}{1-x}$. Le premier membre de l'égalité (6) devient alors égal à $\frac{1}{(1-t)^{m+1}}$ et, dans l'inégalité (6′), il faut faire $g_m = 1$, $\alpha_m = 0$. On trouve alors

(7)

ce qui donne la conclusion annoncée.

Supposons maintenant que g_m tende régulièrement (1) vers la limite 1 ; que, de plus, pour toutes les valeurs de p et de q suffisamment grandes, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ soit inférieure en valeur absolue à un angle fixe ψ plus petit que $\frac{\pi}{2}$ (l'égalité étant exclue). A partir d'une certaine valeur de m, on aura (η désignant un nombre aussi petit qu'on veut)

$$(1-\eta)^m, \qquad \cos(\alpha_{m+k} - \alpha_{m+k'}) > \cos\psi,$$

d'où l'on déduit, en ayant égard à la formule (7), que le premier membre de l'inégalité (6′) est supérieur à $\cos\frac{(1-\eta)^{2m}}{|1-t(1-\eta)|^{2(1+m)}}$. Sa racine $m^{\text{ième}}$ sera donc (à un infiniment petit près) au moins égale à $\frac{1-\eta}{1-t(1-\eta)}$, c'est-à-dire (si l'on a pris η suffisamment petit) supérieur à $\frac{1-\varepsilon}{1-t}$, car $\frac{1-\eta}{1-t(1-\eta)}$ a pour limite $\frac{1}{1-t}$ lorsque η tend vers zéro. L'inégalité (6′) est donc vérifiée et le point $x = 1$ est un point singulier.

10. Ce résultat subsisterait alors même que l'inégalité $|\alpha_q - \alpha_p| < \psi$ cesserait d'être vraie pour les valeurs de p et de q ne satisfaisant pas à la condition

dans laquelle q est supposé, pour fixer les idées, plus grand que p, et s désigne un nombre positif fixe.

(1) Voir n° 2.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que, pour toutes les valeurs de h inférieures à ms, les évaluations précédentes sont encore applicables : le coefficient de t^h est plus grand que $C^h_{2m+h+1}(1-\eta)^{2m+h}\cos\psi$.

Soit n le plus petit entier supérieur à ms. A partir de la valeur $h = n$, nous ne savons plus si le coefficient de t^h est supérieur à l'expression précédente; nous ne savons même plus s'il est positif; mais en tout cas sa valeur absolue sera moindre que $C^h_{2m+h+1}(1+\eta')^{2m+h}$ (où η' désigne encore un nombre très petit), de sorte que le premier membre de l'inégalité (6′) sera supérieur à

$$(8)\quad \cos\psi\frac{(1-\eta)^{2m}}{[1-t(1-\eta)]^{2(m+1)}} - \sum^{\infty} C^h_{2m+h+1}\, t^h[(1+\eta')^{2m+h} + \cos\psi(1-\eta)^{2m+h}].$$

Dans le dernier facteur du coefficient de t^h, le second terme $\cos\psi(1-\eta)^{2m+h}$ peut évidemment rentrer dans le premier $(1+\eta')^{2m+h}$ moyennant un accroissement infiniment petit donné à η'. Dans la série qui forme la partie soustractive de l'expression (8), après cette simplification, le rapport d'un terme au précédent, égal à $t(1+\eta')\frac{2m+h+1}{h}$, est moindre que $t(1+\eta')\frac{2+s}{s}\cdot$ Cette quantité est plus petite que 1, si l'on a choisi t inférieur à $\frac{s}{(2+s)(1+\eta')}$, et la série est égale au produit d'un facteur fini $\left[\text{de module moindre que } \frac{1}{1-t(1+\eta')\frac{2+s}{s}}\right]$ par son premier terme $C^n_{2m+n+1}(1+\eta')^{2m+n}t^n$.

Or, si l'on applique au coefficient C^n_{2m+n+1} les formules bien connues relatives à la fonction Γ pour de grandes valeurs de l'argument, on reconnaît que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce premier terme tend vers $\frac{(2+s)^{2+s}}{2^2 s^s}(1+\eta')^{2+s}t^s$, c'est-à-dire, puisque nous pouvons prendre t aussi petit que nous le désirons, vers une limite moindre que $\frac{1-\varepsilon}{t}\cdot$ La partie soustractive de l'expression (8) est donc infiniment petite par rapport au premier terme et ne modifie pas, par suite, les conclusions établies plus haut.

Si le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ a pour limite l'unité, la racine $m^{\text{ième}}$ de g_m tend régulièrement vers 1 et la différence $\delta_m = \alpha_{m+1} - \alpha_m$ tend vers 0.

Nous reconnaissons que le point $x = 1$ est bien un point singulier si le produit $m\delta_m$ reste toujours inférieur à un nombre fixe Q. En effet, s'il en est ainsi, la différence $\alpha_q - \alpha_p$ sera moindre que ψ tant que le rapport $\frac{q-p}{p}$ ne dépassera pas $\frac{\psi}{Q}$.

11. Mais on peut encore s'affranchir d'une partie des restrictions précédentes, car il n'est pas nécessaire que l'inégalité (6) soit vraie pour toutes les valeurs très grandes de m, mais seulement pour une infinité d'entre elles. Il suffira donc que la série contienne, en nombre infini, des suites interrompues de coefficients

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a & \\ a & a_{m'+1}, \\ a_{m''}, & a_n \end{array} \right.$$

satisfaisant aux conditions suivantes

1° Les rapports $\frac{n}{m}$, $\frac{n}{m'}$, $\frac{n}{m''}$ sont tous supérieurs à un nombre fixe s;

2° $|\sqrt[m]{g_m}|$ tend régulièrement vers 1 quand m augmente indéfiniment par des valeurs correspondant à des termes de ces suites;

3° Si a_q et a_p sont deux coefficients pris dans une même suite, la différence $\alpha_p - \alpha_q$ est en valeur absolue moindre que ψ.

A chacune de ces suites, à partir d'un certain rang, correspondra une valeur de m pour laquelle l'inégalité (6') sera vérifiée.

Si la troisième condition $(\alpha_p - \alpha_q) < \psi$ était remplacée par la double inégalité

$$\cdot p)\theta \cdot \qquad\qquad \cdot p)\theta + \psi.$$

la fonction donnée admettrait le point singulier $x = e^{i\theta}$. Ce résultat est équivalent au premier moyennant une transformation (4) effectuée avec la valeur $e^{i\theta}$ pour x_0.

Sous cette forme, notre proposition se distingue de celles que nous avons données précédemment en ce qu'elle peut, dans certains cas, déceler la présence de plusieurs points singuliers. L'existence de suites (9) correspondant à une certaine valeur de θ n'est, en effet,

nullement incompatible avec l'existence de suites analogues, mais pour lesquelles l'angle θ, qui figure dans les conditions (10), aurait des valeurs différentes.

On pourrait même, par ce procédé, former des séries qui admettraient le cercle de convergence comme ligne singulière.

Supposons, par exemple, les nombres rationnels rangés en suite linéaire, comme l'indique M. Cantor, et soit r_λ celui qui occupe le rang λ. Nous considérons une série dans laquelle, pour toutes les valeurs de m comprises entre $(1+s)^\lambda$ et $(1+s)^{\lambda+1}$, le rapport $\frac{a_{m+1}}{a_m}$ sera égal à $e^{i2\pi r_\lambda}$. Nous aurons une infinité de suites pour lesquelles ce rapport aura la même valeur, car les quantités $e^{2i\pi(r_{\lambda+1})}$, $e^{2i\pi(r_{\lambda+2})}$, ... sont toutes égales à $e^{2i\pi r_\lambda}$. Le point $x = e^{-2i\pi r_\lambda}$ est donc singulier, quel que soit λ, et par conséquent le cercle de rayon 1 est bien ici une coupure.

12. Signalons encore un autre cas simple où l'on reconnaît que le cercle de convergence est ligne singulière. Soit, par exemple, la série [1]

(11)

qui a été considérée par M. Weierstrass [2] et qui converge dans un cercle de rayon $\rho = \lim b^{-\frac{\nu}{c^\nu}} = 1$. Cette série n'est altérée que dans ses premiers termes par le changement de x en $xe^{\frac{2ki\pi}{c^h}}$, où k et h sont deux entiers arbitraires. Or, la fonction correspondante admet nécessairement sur le cercle de rayon 1 au moins un point singulier $x = x_0$. Elle aura donc aussi une singularité en chacun des points

ki

parmi lesquels on en pourra trouver qui approchent autant qu'on le voudra d'un point quelconque pris sur le cercle.

Les mêmes raisonnements s'appliqueront toutes les fois que les

(1) c est un entier positif et b un nombre quelconque.

(2) *Voir* du Bois-Reymond, *Journal de Borchardt*, t. LXXIX,

indices des termes non nuls et de plus en plus éloignés auront un commun diviseur de plus en plus grand. En ce cas, le cercle de convergence sera par conséquent une coupure, ainsi que l'avait démontré M. Lerch ([1]) dans un cas particulier. M. Weierstrass ([2]) avait d'ailleurs constaté ce fait sur la série (11).

13. La démonstration précédente offre cet inconvénient qu'elle fait dépendre le résultat d'une question de divisibilité, en sorte qu'il semblerait ne pas subsister nécessairement si, par exemple, on augmentait ou diminuait d'une unité les exposants de quelques puissances de x dans la série (11).

Il n'en est rien cependant, et l'on peut affirmer que *la série*

(où les c sont des entiers croissants) *admet son cercle de convergence comme ligne singulière, si le rapport* $\frac{c_{\mu+1}-c_\mu}{c_\mu}$ *est constamment supérieur à un nombre fixe s.*

Pour s'en convaincre, il suffit de donner à m, dans la formule (6'), la valeur $\frac{c_\mu}{u}$ où u est un nombre fixe compris entre 1 et $1+s$, et que nous déterminerons ultérieurement ([3]). Au premier membre, le premier terme non nul est

et, d'après les formules déjà employées au n° 10, sa racine $2m^{\text{ième}}$ est, pour une infinité de valeurs de μ, supérieure à $\frac{(1-\eta)t^{u-1}u^u}{(u-1)^{u-1}}$.

Cette expression a son maximum pour $u=\frac{1}{1-t}$ et devient égale à $\frac{1-\eta}{1-t}$. Quant aux termes suivants, ainsi qu'on l'a vu plus haut, ils n'influent pas sur le résultat, si l'on a choisi pour t une

([1]) *Acta mathematica*, t. X, p. 87.

([2]) *Monatsberichte der königl. Acad. der Wissenschaften zu Berlin*, août 1880.

([3]) Si $\frac{c_\mu}{u}$ n'est pas entier, il faudra prendre pour m l'entier le plus voisin de $\frac{c_\mu}{u}$

valeur satisfaisant aux inégalités

$$l(1+\eta')$$

La proposition est donc démontrée, car les raisonnements que nous venons de faire ne seraient pas altérés si l'on effectuait la transformation (4) avec la valeur $x_0 = e^{i\theta}$, de sorte que notre fonction admet pour point singulier le point $x_0 = e^{i\theta}$, quel que soit θ.

Bien entendu, le résultat précédent peut subsister, lors même que le rapport $\frac{c_{\mu+1} - c_\mu}{c_\mu}$ ne serait pas constamment supérieur à s. Il suffit qu'il prenne deux valeurs consécutives supérieures à s, et cela une infinité de fois, les modules des coefficients correspondants tendant régulièrement vers 1.

Nous bornerons ici ces remarques préliminaires et, dans les Chapitres qui vont suivre, nous traiterons la question à un point de vue tout différent.

Les points critiques susceptibles d'être reconnus à l'aide des propositions précédentes sont en effet (ainsi qu'il deviendra évident par la suite) d'espèces très diverses; au lieu que nous allons maintenant étudier les singularités en les distinguant d'après leur nature et en commençant par les plus simples, à savoir les singularités polaires.

DEUXIÈME PARTIE.

14. *Si la seule singularité située sur le cercle de convergence est un pôle, simple ou multiple, l'affixe de ce point est donné par la limite du rapport* $\frac{a_m}{a_{m+1}}$, comme on le voit en employant les expressions indiquées par M. Darboux [1] pour les coefficients.

Par exemple, si la série (2), convergente dans le cercle de rayon ρ admet pour unique singularité sur ce cercle le pôle simple $x = x_1$ le coefficient a_m peut se mettre sous la forme $\frac{A}{x_1^m} + \frac{\theta_m}{(\rho' - \varepsilon)^m}$ où θ désigne une quantité de module inférieur à 1, ε un infiniment petit,

[1] *Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres*, p. 15.

et ρ' un rayon supérieur à ρ. On voit alors immédiatement que le rapport $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ tend vers x_1, et cela de telle façon que la différence soit, à partir d'un certain rang, inférieure à $\left(\frac{\rho}{\rho'-\varepsilon}\right)^m$ ou à k^m, k désignant un nombre fixe plus petit que 1.

Cette condition nécessaire est aussi suffisante.

En effet, pour écrire que le point $x = x_1$ est pôle simple et d'ailleurs singularité unique sur le cercle de convergence, il suffit d'exprimer que, en multipliant la série (2) par $\left(1-\frac{x}{x_1}\right)$, on obtient une série convergente dans un cercle de rayon plus étendue que le premier. Or, en faisant cette multiplication, on trouve pour terme général

$$[illegible] = x^m a_{m-1} [illegible]$$

Le coefficient de x^m devient donc plus petit que $\left[\frac{k}{\rho} [illegible]\right.$, si la différence $\frac{a_m}{a_{m-1}} - \frac{1}{x_1}$ est moindre que k^m.

15. Cherchons maintenant dans quels cas notre fonction a pour singularités, sur le cercle de convergence, plusieurs pôles simples ou multiples.

Nous serons tout pareillement conduits à multiplier la fonction donnée $f(x)$ par un polynome

$$(12) \qquad [illegible] \ldots = 1 [illegible] A_1 x + \ldots + A_p x^p,$$

de degré p, et à nous demander si le produit obtenu est une fonction régulière dans un cercle de rayon supérieur à ρ.

16. Après la multiplication, les nouveaux coefficients seront donnés par la formule

[illegible]

et devront satisfaire à l'inégalité

Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p +$

que la formule (13) permet d'écrire

ρ_{m+p}

Sous cette dernière forme, les hypothèses faites sur les a et les b nous font voir immédiatement que $D_{m,p}$ doit être plus petit que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho''\rho'}\right)$ où ε a toujours la même signification que précédemment, à savoir, un nombre que l'on peut supposer aussi petit qu'on le veut, pourvu que l'on prenne m suffisamment grand.

La limite supérieure, pour m infini, *de* $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$, *est donc moindre*

ρ''

17. Réciproquement, supposons que, pour certaines valeurs de P, la limite supérieure (pour m infini) de $\sqrt[m]{|D_{m,P}|}$ soit moindre que $\frac{1}{\rho^{P+1}}$.

Soit p la plus petite de ces valeurs, et $\frac{1}{\rho''\rho'}$ la limite supérieure correspondante. Par hypothèse, la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$

Je dis, en premier lieu, que $\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|}$ *tend régulièrement vers cette limite.* En d'autres termes [1], si petit que soit ε, à partir d'un certain rang, chaque déterminant $D_{m,p-1}$ a un module supérieur à $\left(\frac{1}{\rho''}\right.$

Nous savons, en effet, qu'il existe une infinité de déterminants $D_{m,p-1}$

[1] *Voir* au n° 2.

plus grands que les valeurs correspondantes de $1 - \frac{}{2}\varepsilon$ ou de α''

en posant $\alpha = \frac{}{\rho''}$, d'où $\frac{1 \quad \varepsilon}{\quad} = \alpha \frac{1 \quad \varepsilon}{\quad}$

Si, à partir d'un certain rang, tous satisfont à cette condition, notre conclusion est établie. Dans le cas contraire, on devra pouvoir trouver, et cela aussi loin qu'on le voudra dans la série, un déterminant $D_{m_0, p-1}$ supérieur à α^{m_0}, précédé d'un déterminant $D_{m_0-1, p-1}$ moindre que α^{m_0-1}.

Or on a, quel que soit m,

Car les mineurs du déterminant $D_{m\ 1, p}$ relatifs aux éléments $a_{m\ 1}$, a_{m+p-1}, a_{m+2p-1}, qui occupent les angles de ce déterminant, sont respectivement

$$D_{m+1, p-1}, \quad D_{m, p-1}, \quad D_{m-1, p-1},$$

et le mineur du second ordre obtenu par la suppression des deux lignes et des deux colonnes extrêmes est $D_{m, p-2}$. L'égalité (14) n'est donc que l'expression d'une identité bien connue relative aux déterminants.

Cette égalité (14) fournit d'ailleurs d'après ce que nous savons sur l'ordre de grandeur des déterminants $D_{m,p}$ et $D_{m,p\ 2}$, l'inégalité

(14′) $$| D_{m+1, p-1} D_{m-1, p-1} - D^2_{m, p-1} | <$$

où k est un nombre plus petit que 1 [1].

Donnons à m la valeur m_0 : nous trouvons

$$D_{m_0+1, p-1}$$

d'où résulte déjà que, pour m_0 très grand, les quantités $| D_{m_0}$

[1] $k = (1 + \varepsilon'$

et $\frac{\quad {}^{,p-1}}{D_{m_0,\,p-1}}$ seront respectivement supérieures à $\Big(\alpha$

$\alpha \frac{1 - \varepsilon}{1}$

En général, nous allons démontrer que, si l'on a pris le nombre m_0 suffisamment grand, on aura, pour toute valeur positive de l'entier i,

(15) $\frac{m_0+i,\,p-1}{}$

(16) $|D_n \qquad \alpha^{m_0+i}(1 - k^{2m_0})^i [1 - k^2$

Ces inégalités sont, en effet, vérifiées pour $i = 1$. Supposons-les démontrées pour une certaine valeur de i. Je vais faire voir qu'elles subsisteront pour la valeur suivante, et que l'on pourra écrire

$\alpha(1 - k^{2m_0}$

(16′) $|D_{m_0+i+1,\,p-1}| > \alpha^{m_0+i+1}(1 - k^{2m_0})^{i+1}[1 - k^{2(m_0+1)}]^i \ldots [1 - k^{2(m_0+i-1)}]^2 [1 - k^{2(m_0+i)}],$

$m_0+i+1 \qquad\qquad 1 - \varepsilon$

Pour cela, nous ferons $m = m_0 + i$ dans l'inégalité (14′), en tenant compte de la formule (17), nous donnera

dont la multiplication membre à membre avec la formule (15) fournit la formule (15′).

Celle-ci, combinée avec (16), donne l'inégalité (16′).

Quant à l'inégalité (17′), elle résulte de la précédente, pourvu que l'on ait choisi pour m_0 une valeur suffisamment élevée; car il vient successivement

$1 \quad k^{2i}$

$\overline{1 - k^2}.$

Il nous suffira donc que l'indice m_0 satisfasse à la condition

ce qui est évidemment possible.

L'inégalité (17) est, dès lors, générale, et notre proposition préliminaire est démontrée.

18. Cela posé, déterminons les quantités $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots, A_m^{(p)}$ par les équations

(18) $\Big\{ a_{m+p+1}$

et posons

$$\delta_m^{(h)} = A_{m+1}^{(h)} - A_m^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Les δ pourront être considérés comme donnés par les équations

$$(19)\quad \begin{cases} \delta_m^{(1)} a_{m+p} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+p+1-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+1} = 0, \\ \delta_m^{(1)} a_{m+p+1} + \ldots + \delta_m^{(h)} a_{m+p+2-h} + \ldots + \delta_m^{(p)} a_{m+2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ = 0, \\ = 0, \end{cases}$$

en introduisant la quantité auxiliaire

L'élimination des A entre les équations (18) et (20) donne

(21)

moyennant quoi les équations (19) fournissent

$$\frac{{}_{m,p} D_{m+1,p-}^{h}}{{}_{m,p-1} D_{m+1,p-1}}$$

où $D_{m+1,p-2}^{(h)}$ désigne un déterminant d'ordre $p-1$ formé avec coefficients a et moindre que $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho^{p-}}\right)^m$

Comme on a les inégalités

$$\rho^p \rho'$$

$$\sqrt[m]{|D_{m,p-1}|} >$$

$$\sqrt[m]{|}$$

cette formule (22) montre que la limite supérieure de $\sqrt[m]{|\delta_m^{(h)}|}$ est au plus égale à $\frac{\rho}{\rho'}$.

La série $\sum \delta_m^{(h)}$, ayant son terme général de l'ordre de $\Big(\frac{\rho}{\rho'} +$

est donc convergente et son reste est aussi du même ordre.

$A_m^{(h)}$ tend, par conséquent, lorque m augmente indéfiniment, vers une limite $A^{(h)}$, et cela de telle façon que la différence $A^{(h)} - A_m^{(h)}$ reste moindre en valeur absolue que $\left(\frac{\rho}{\rho'} + \varepsilon\right)^m$.

Il suffit alors d'écrire la première des équations (18) sous la forme

$$a_{m+p} + A^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + A^{(p)} a_m = \sum_{h=1}^{p} (A^{(h)} - A_m^{(h)}) a_{m+p-h}$$

pour reconnaître que la quantité

est moindre

L'existence d'un polynome $\mathfrak{T}_p$ [*voir* (12)] répondant à la question est donc établie, et nous avons même le moyen de trouver ce polynome. On devra, d'après ce qui précède, résoudre les équations (18) par rapport aux A et chercher la limite des valeurs de $A_m^{(h)}$ ainsi obtenues, lorsqu'on donne à m des valeurs de plus en plus grandes. L'erreur commise en s'arrêtant à un certain rang m sera comparable au $m^{\text{ième}}$ terme d'une progression géométrique décroissante de raison $\frac{\rho}{\rho'}$.

Ainsi *les singularités de notre fonction sur le cercle de rayon* ρ *se réduisent à des pôles, en nombre égal à* p *(chaque pôle étant compté*

avec son degré de multiplicité), et dont les affixes sont racines d'une équation que nous savons former ([1]).

Ces pôles exceptés, la fonction est régulière dans le cercle de rayon ρ'.

19. Pour rechercher si les singularités de $f(x)$ situées sur le cercle de rayon ρ' sont aussi des pôles, il suffirait d'appliquer la méthode précédente au produit $f(x)\,\mathfrak{T}_p(x)$.

Mais on peut aussi opérer directement sur la fonction $f(x)$, ainsi que nous allons le montrer.

Désignons, en général, par l_{P} la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,\mathrm{P}}|}$ et remarquons d'abord que le rapport $\frac{l_{\mathrm{P}-1}}{l_{\mathrm{P}}}$ est égal à ρ tant que P est moindre que p et à ρ' lorsque $\mathrm{P} = p$.

Pour $\mathrm{P} \geqq p$, l_{P} est au plus égal à $\frac{1}{\rho^{p}\rho'^{\mathrm{P}-p+1}}$. Car le déterminant $D_{m,\mathrm{P}}$ peut s'écrire

$$\ldots\ \mathrm{P}-p$$

Plus généralement, la formule (13), résolue par rapport à a_{m+p} et appliquée plusieurs fois de suite, permet d'exprimer $a_{m+p}, a_{m+p+1}, \ldots, a_{m+\mathrm{P}}$ en fonction linéaire de $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+p-1}$ et des b.

Ces expressions, reportées dans la valeur de $D^{(h)}_{m,\mathrm{P}}$, lui donnent une forme analogue à la forme (23) et sur laquelle on reconnaît que la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D^{(h)}_{m,\mathrm{P}}|}$ est au plus égale à $\frac{1}{\rho^{p}\rho'^{\mathrm{P}-p+1}}$.

Nous noterons ce fait que la relation

$$\text{m sup}\sqrt[m]{|D^{(h)}_{m,\mathrm{P}}|}$$

peut être considérée comme exacte à partir de la valeur $\mathrm{P} = p$

([1]) Le cas du pôle simple, précédemment étudié correspond à $p = 1$. Les minants $D_{m,p-1}$ ne sont autres que les coefficients a_m eux-mêmes.

Les raisonnements précédents subsistent, pourvu qu'on ait soin de rem les déterminants $D_{m,p-2}$ et $D^{(h)}_{m,p-2}$ par l'unité.

Supposons maintenant que l_P devienne moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{P-p+1}}$, et soit q la plus petite valeur de P pour laquelle cet abaissement se produise (q pouvant être égal à $p + 1$ ou plus grand).

On peut aussi définir q comme la plus petite valeur de P pour laquelle le rapport $\frac{l_P}{l_{P-1}}$ devienne inférieur à $\frac{1}{\rho'}$. En particulier, on a

$$\frac{l_q}{l_{q-1}} < \frac{\;}{l_{q-2}}$$

ou

Si nous nous reportons alors à l'identité (14), dans laquelle nous changerons p en q, nous voyons que la limite supérieure de

est plus petite que l_{q-1}^2.

Dès lors tous les raisonnements donnés au n° 17 peuvent se recommencer en remplaçant p par q et $\frac{1}{\rho^p}$ par l_{q-1}, α étant supposé égal à $l_{q-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et k à $(1 + \varepsilon')\sqrt{\frac{l_q\, l_{q-2}}{l_{q-1}^2}}$.

La conclusion à laquelle on aboutit est que $\sqrt[m]{|D_{m,q-1}|}$ tend régulièrement vers la limite l_{q-1}.

20. Tout pareillement, nous écrirons un système de q équations

$$(18') \qquad a_{m+2q-1} + \mathrm{A}_m'^{(1)} a_{m+2q-2} + \ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots + \mathrm{A}_m'^{(q)} a_{m+q-1} = 0,$$

analogue au système (18); et si nous posons

il viendra

$$(22) \qquad \ldots_m = \frac{\ldots_q D_{m,q-2}}{D_{m,q-1}\, D_{m+1,q-1}}.$$

Mais $q - 2$ étant au moins égal à $p - 1$, la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,q-2}^{(h)}|}$ est au plus égale à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p-1}}$, c'est-à-dire à l_{q-2}. La

racine $m^{\text{ième}}$ de $\delta_m^{(h)}$ sera donc moindre que $\frac{l_q l_{q-2}}{l_{q-1}^2} + \varepsilon$, de sorte que $A_m^{\prime(h)}$ tend, pour chaque valeur de h, vers une limite $A'^{(h)}$.

Pour trouver l'ordre de grandeur de la quantité

$$a_{m+q} + A'^{(1)} a_{m+q-1} + \ldots + A'^{(q)} a_m,$$

il est nécessaire de faire subir aux équations (18′) une transformation.

Nous avons vu, au numéro précédent, que les quantités a_{m+p}, $a_{m+p+1}, \ldots, a_{m+P}$ sont liées à $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_{m+p-1}, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_{m+P-p}$, par un système S_P de $P - p + 1$ relations linéaires à coefficients indépendants de m, système qui peut être résolu par rapport à $a_{m+p}, \ldots, a_{m+P}$ comme par rapport à $b_m, \ldots, b_{m+P-p}$. On peut donc, au lieu des équations (18′), écrire les suivantes :

$$B_m^{(1)} b_{m+q-p-} \qquad \alpha_m^{(1)} a_{m+p-1} \qquad \alpha_m^{(p)} a_m$$
$$B_m^{(1)} b_{m+q-p}$$

$$b_{m+2q-p-1} + B_m^{(1)} b_{m+2q-p-2} + \ldots + B_m^{(q-p)} b_{m+q-1} + \alpha_m^{(1)} a_{m+p+q} + \ldots + \alpha_m^{(p)} a_{m+q-1}$$

qui équivalent aux équations (18′) moyennant les relations S_q. On passe des coefficients B et α aux A', et inversement, par une substitution linéaire Σ_q à coefficients indépendants de m.

Si nous formons les différences

$$B_{m+1}^{(h)} - B_m^{(h)}, \quad \alpha_{m+1}^{(k)} - \alpha_m^{(k)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, q - p;\ k = 1, 2, \ldots, p),$$

nous voyons que les premières sont inférieures à $\left(\frac{l_q l_{q-2}}{l_{q-1}^2} + \varepsilon\right)^m$. Quant aux secondes, elles se présentent sous la forme du produit de

par un déterminant $\mathcal{D}_{m,q-2}^{(h)}$ se déduisant du déterminant

$$b_{m+q-p-1} \quad \ldots \quad b_m \qquad a_{m+p-1} \quad \ldots \quad a_m$$

$$b_{m+2q-p-2} \quad \ldots \quad b_{m+q-1} \quad a_{m+q+p-2} \quad \ldots \quad a_{m+q-1}$$

par la suppression de la dernière ligne et de l'une des *p dernières* colonnes, et qui, par conséquent, est moindre que $\left(\frac{1}{\rho^{p-1}\rho'^{q-p}} + \varepsilon\right)^m$ ou que $\left(l_{q-2}\frac{\rho}{\rho'} + \right.$

Les limites des quantités α sont d'ailleurs nulles, ainsi qu'on le reconnaît en résolvant, par rapport aux α, les p premières équations (25), où les B, qui sont des quantités finies, sont regardés comme connus; et si $B^{(h)}$ désigne la limite de $B_m^{(h)}$ pour m augmentant indéfiniment, le système de nombres $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(q-p)}$, o, o, ..., o est celui même que l'on déduit du système $A'^{(1)}, \ldots, A'^{(q)}$ par la substitution Σ_q, de sorte que la somme

$$a_{m+q} + A^{(1)} a_{m+q-1} + \ldots + A^{(q)} a_m$$

est, moyennant les relations S_q et Σ_q, identiquement égale à

$$b_{m+q} + B^{(1)} b_{m+q-1} + \ldots + B^{(q-p)} b_m.$$

Or, cette dernière, d'après les évaluations obtenues pour $B^{(h)}$ — et $\alpha^{(k)} - \alpha_m^{(k)}$, est inférieure à $\left(\frac{l_q}{l_{q-1}} + \varepsilon\right)^m$.

Nous avons donc formé un polynome

tel que le produit $\mathfrak{P}'_{(q)}(x) f(x)$ soit holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que ρ' $\left(\rho'' = \frac{l_{q-1}}{l_q}\right)$.

Comme cela était évident *a priori*, ce polynome $\mathfrak{P}'_q$ contient en facteur le polynome $\mathfrak{P}_q$; il est identique au produit

$$\mathfrak{P}_p(1 + B^{(1)} x + \ldots + B^{(q-p)} x^{q-p}).$$

Il n'existe d'ailleurs pas de pareil polynôme $\mathfrak{P}'$ pour un degré $q - i$ moindre que q; sans quoi, si l'on désignait par c_m les coefficients du produit $f \mathfrak{P}'_{q-i}$, le déterminant $D_{m,q-i}$ pourrait s'écrire

$$q-i-p-1$$

$$m+q \qquad b_{m+q-i} \qquad b_{m+2q-i-p}$$

et sa racine $m^{\text{ième}}$ aurait une limite supérieure moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-i-p+1}}$ ce qui, d'après nos hypothèses, ne peut arriver que pour $i = 0$.

La fonction $f(x)$ admet donc p pôles sur la circonférence de rayon ρ et $q - p$ sur la circonférence de rayon ρ' (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité). Ces pôles exceptés, elle est régulière dans un cercle de rayon $\rho'' = \frac{l_{q-1}}{\ldots}$;

21. Rien n'empêche de recommencer à nouveau ces raisonnements.

Premièrement, on démontrera que, pour $P \geqq q$, les limites supérieures de $D_{m,P}$ et de $D_{m,P}^{(h)}$ sont au plus égales à $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p} \rho''^{P-q+1}}$. En désignant par r la plus petite valeur de P telle que l_P soit moindre que $\frac{1}{\rho^p \rho'^{q-p} \rho''^{P-q+1}}$, on remarquera d'abord que l'inégalité

$$\lim_{m=\infty} \text{sup.} \sqrt[m]{|D_{m,P}^{(h)}|} \leqq l_P$$

est vérifiée pour les valeurs de P comprises entre q et r, comme elle l'était déjà pour les valeurs moindres que q, et l'on partira ensuite de la relation

pour effectuer des opérations analogues aux précédentes ([1]) et calculer un polynome $\mathfrak{T}''_r$, tel que le produit $f\mathfrak{T}''_r$ soit holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que ρ''. On démontrera, comme tout à l'heure, qu'il ne peut exister aucun polynome $\mathfrak{T}''$ de degré moindre que r.

Notre fonction est donc méromorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon $\rho''' = \frac{l_{r-1}}{l_r}$. Elle admet dans ce cercle r pôles, à savoir p de module ρ, $q-p$ de module ρ', $r-q$ de module ρ''.

On pourra continuer ainsi tant que l'on trouvera des valeurs de P satisfaisant à l'inégalité

et, par conséquent, on peut énoncer les conclusions suivantes :

([1]) Nous avons utilisé, pour la transformation des déterminants $D_{m,P}^{h}$ et des équations (18'), les relations linéaires qui permettent d'exprimer les coefficients $a_{m+p}, \ldots, a_{m+q}$ en fonction de $a_m, \ldots, a_{m+p-1}$ et des b.

Les relations analogues qu'il convient d'employer ici sont celles qui donnent a_{m+P} en fonction linéaire de $a_m, \ldots, a_{m+p-1}, b_m, \ldots, b_{m+q-p-1}, c_m, \ldots, c_{m+P-q-1}$ (c_m désignant un coefficient du produit $f\mathfrak{T}'$), et de même les substitutions des opérations suivantes introduiraient 4, 5, ... séries de coefficients.

Au reste, il faut remarquer que ces relations ne servent qu'à la démonstration. Elles n'interviennent pas dans le calcul des polynomes $\mathfrak{T}$.

Le rapport $\frac{l_{P-1}}{l_P}$ *ne va jamais en diminuant.*

Si pour $P = P^{(\lambda)}$, *ce rapport prend une valeur*

$$\rho^{(\lambda)} = \frac{l_{P^{(\lambda)}-1}}{l_{P^{(\lambda)}}},$$

supérieure à $\frac{l_{P^{(\lambda)}-2}}{l_{P^{(\lambda)}-1}}$, *la fonction* $f(x)$ *est méromorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon* $\rho^{(\lambda)}$; *elle y admet en tout* $P^{(\lambda)}$ *pôles (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).*

Si l'on a

$$P^{(\lambda+1)} = 1 + P^{(\lambda)},$$

$f(x)$ n'admet qu'un seul pôle $x = \xi$ sur le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$ et le polynome $\mathfrak{P}^{(\lambda+1)}$ est égal au produit $\mathfrak{P}^{(\lambda)}\left(1 - \frac{x}{\xi}\right)$. Or, dans le polynome $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$, le coefficient de la plus haute puissance de x est $\lim \frac{D_{m,P^{(\lambda)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda)}}}$, et dans le polynome $\mathfrak{P}^{(\lambda+1)}$, il est $\lim \frac{D_{m,P^{(\lambda+1)}}}{D_{m-1,P^{(\lambda+1)}}}$. L'affixe du pôle unique est donc donnée par la formule

(28) $$\xi = \lim \frac{D_{m,P^{(\lambda)}}}{[illegible]} : [illegible]_{n,P^{(\lambda)}}$$

et les erreurs commises en s'arrêtant aux valeurs successives de m diminuent comme les termes d'une progression géométrique décroissante ayant pour raison $\frac{\rho^{(\lambda)}}{\rho^{(\lambda+1)}}$.

22. Si nous envisageons la suite des quantités $l_1, l_2, \ldots, l_P, \ldots$, nous sommes conduit à distinguer les cas suivants :

1° A partir d'un certain moment, l_P devient nul. La fonction n'a dans tout le plan qu'un nombre limité de pôles. Elle est égale au quotient d'une fonction holomorphe par un polynome entier.

2° Le rapport $\frac{l_P}{l_{P-1}}$ tend vers 0 lorsque P augmente indéfiniment. Notre fonction n'a que des pôles dans un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut. Elle est donc méromorphe dans tout le plan.

Nous avons d'ailleurs tous les éléments nécessaires pour former

la fonction holomorphe $G(x)$ qui admet pour zéros les pôles de $f(x)$ avec le même ordre de multiplicité.

En premier lieu, les modules des pôles successifs sont les valeurs de $\frac{l_{p-1}}{l_p}$. Le genre de la fonction $G(x)$, s'il existe, sera un nombre γ tel que la série $\sum \left(\frac{l_p}{l_{p-1}}\right)^\gamma$ soit convergente.

Si ce nombre est égal à 1, la fonction $G(x)$ sera la limite du produit convergent

x_n étant l'affixe du $n^{\text{ième}}$ pôle, et par conséquent la limite, pour λ infini, du polynome

Si le nombre γ est supérieur à 1, on sait qu'il faudrait multiplier chacun des facteurs $\left(1 - \frac{x}{x_n}\right)$ par $e^{-\int\left(\frac{1}{x_n} + \frac{x}{x_n^2} + \ldots + \frac{x^{\gamma-2}}{x_n^{\gamma-1}}\right)dx}$.

Or, la somme $\sum_{n=1}^{p(\lambda)} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{x}{x_n^2} + \ldots + \frac{x^{\lambda-2}}{x_n^{\lambda-1}}\right)$ constitue les γ miers termes du développement de $\sum_{n=1}^{p(\lambda)} \left(\frac{1}{x - x_n}\right) = \frac{d}{dx} \log \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)$.

La fonction $G(x)$ sera donc la limite, pour λ infini, de l'expression

$$\mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)\, e^{-\int Q_\lambda(x)\, dx},$$

où $Q_\lambda(x)$ désigne l'ensemble des $\gamma - 1$ premiers termes dans le développement de $\frac{d}{dx} \log \mathfrak{P}^{(\lambda)}(x)$ suivant les puissances croissantes de x.

Si enfin il n'existait pas de genre fini, il faudrait calculer les affixes des différents pôles et appliquer telle quelle la méthode de M. Weierstrass.

Dans ces différents cas, on peut d'ailleurs obtenir le développement taylorien de $G(x)$.

La fonction $G(x)$ est en effet la limite de fonctions holomorphes.

$$G^{(\lambda)}(x) = a_0^{(\lambda)} + a_1^{(\lambda)}x + \ldots + a_m^{(\lambda)}x^m + \ldots,$$

où les coefficients $a^{(\lambda)}$ peuvent être considérés comme donnés par la formule

C désignant un contour fermé décrit autour de l'origine et que nous pourrons supposer, pour fixer les idées, intérieur au cercle de convergence primitif.

Sur ce contour, $G^{(\lambda)}(z)$ tend uniformément vers sa limite $G(z)$ quand λ augmente indéfiniment et par conséquent, dans les mêmes conditions, $a_m^{(\lambda)}$ a pour limite a_m.

La fonction $G(x)$ étant ainsi calculée, le produit $f(x)\,G(x)$ sera une fonction $F(x)$ holomorphe dans tout le plan, et dont la multiplication des séries f et G nous fournira d'ailleurs le développement; de sorte que nous aurons l'expression de la série donnée sous forme du quotient de deux fonctions entières

3° Le rapport $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ reste invariable à partir d'une certaine valeur $P^{(\lambda)}$. $f(x)$ est alors le quotient par un polynome $\mathfrak{P}^{(\lambda)}$ d'une fonction régulière dans un cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$, mais présentant sur ce cercle des singularités autres que des pôles. C'est à l'étude de cette dernière fonction (dont on peut avoir le développement de Taylor) qu'est ramenée l'étude de la proposée.

4° Enfin, il peut arriver que le rapport $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ tende vers une limite $\frac{1}{R}$ différente de 0, de sorte que les rayons $\rho^{(\lambda)}$ tendent vers R. La fonction f, méromorphe dans chacun des cercles $\rho^{(\lambda)}$, admet une infinité de pôles dans le voisinage du cercle de rayon R.

Nous pourrons chercher à former une fonction $G(x)$ qui admette pour zéros les pôles de $f(x)$, en appliquant la méthode de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler.

Nous prendrons d'abord une suite de nombres positifs $\alpha^{(\lambda)}$ qui tendent [1] vers o; puis une suite de quantités positives $\varepsilon^{(\lambda)}$ telles que la série $\Sigma\varepsilon^{(\lambda)}$ soit convergente. Si $V^{(\lambda)}(x)$ désigne alors le polynome qui a pour racines les affixes des pôles situés sur le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)}$, autrement dit le quotient

$$V^{(\lambda)}(x) = \frac{\varphi^{(\lambda+1)}(x)}{\varphi^{(\lambda)}(x)},$$

$\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x)$ sera développable en série uniformément convergente dans le cercle de rayon $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$, et l'on pourra en retrancher un polynome $Q^{(\lambda)}(x)$ tel que la différence $\frac{d}{dx}\log V^{(\lambda)}(x) - Q^{(\lambda)}(x)$ soit, à l'intérieur de ce cercle, moindre que $\varepsilon^{(\lambda)}$.

D'ailleurs, $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$ tend vers R, puisque $\alpha^{(\lambda)}$ tend vers o; et, par suite, un point quelconque x pris à l'intérieur du cercle de rayon R sera, à partir d'une certaine valeur de λ, intérieur à tous les cercles de rayons $\rho^{(\lambda)} - \alpha^{(\lambda)}$. Il en résulte que la série

sera convergente à l'intérieur du cercle de rayon R et que nous pourrons prendre pour notre fonction $G(x)$ le produit

G est donc une limite de fonctions holomorphes $G^{(\lambda)}(x)$, obtenues en prenant de plus en plus de facteurs dans le produit infini (29). On démontrera d'ailleurs, ainsi qu'il a été expliqué pour le cas où $\frac{l_p}{l_{p-1}}$ tend vers o, que chaque coefficient de $G(x)$ est la limite, pour λ infini, du coefficient de même rang dans $G^{(\lambda)}(x)$, et l'on pourra ainsi développer G en série.

La multiplication des fonctions f et G fournira une fonction F

[1] Les pôles étant ici distribués en nombre infini dans le cercle de rayon R et non point dans tout le plan, nous sommes obligé de modifier légèrement la méthode de M. Weierstrass, qui laisse les quantités & finies.

holomorphe également dans le cercle de rayon R. L'étude de la fonction donnée est donc ramenée à celle de deux fonctions F et G, holomorphes dans le cercle R, mais présentant sur ce cercle des singularités non polaires, et dont on peut obtenir les développements. f sera donnée par le quotient de ces deux fonctions.

23. Si

(30) $$) = C_0 \quad C_1 x + .$$

désigne une fonction régulière à l'intérieur d'un certain cercle et ne s'annulant pas à l'origine, de sorte que C_0 est différent de o, les résultats précédents nous fournissent une méthode pour calculer les zéros de $\psi(x)$ à l'intérieur de ce cercle; car les zéros de $\psi(x)$ sont les pôles de la fonction

$$\cdot\, a_m x^n$$

C'est à cette manière de procéder que revient, au fond, la formule de Bernoulli, qui donne la racine de plus petit module comme limite du rapport de deux coefficients consécutifs dans le développement de la dérivée logarithmique. Il suffit, en effet, pour obtenir cette formule, d'appliquer à la dérivée logarithmique la proposition du n° 14.

M. Runge [1] a généralisé la formule de Bernoulli en obtenant sous une forme analogue la $\nu^{\text{ième}}$ racine d'un polynome (en supposant les racines rangées par ordre de module croissant). Les méthodes données dans les Chapitres précédents conduisent à des résultats équivalents, mais applicables à une fonction quelconque dans tout cercle où elle est régulière. En supposant calculés les coefficients a_0, a_m, de · la racine de rang P, si elle est seule de son module, sera donnée par la formule (28). Si plusieurs racines ont le même module, on les obtiendra ensemble comme racines d'une équation algébrique formée en égalant à o le quotient de deux polynomes consécutifs.

[1] *Acta mathematica*, t. VI, p. 316.

Le calcul des coefficients a_m et des déterminants $D_{m,p}$ à l'aide des coefficients C de la fonction donnée peut d'ailleurs se faire de la façon suivante.

En développant, suivant les puissances croissantes de x, le produit $f(x)\,F(x)$, qui est égal à 1, nous aurons, pour déterminer les coefficients a, les équations

(31)
$$\begin{aligned} 0 &= a_0 C_1 + a_1 C_0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ 0 &= a_0 C_m + a_1 C_{m-1} + \dots \end{aligned}$$

De ces équations nous tirerons

(32)
$$\begin{matrix} C_1 & C_0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & 0 \\ & & & \\ C_m & & & \end{matrix}$$

24. Pour calculer les déterminants $D_{m,p}$, nous utiliserons les formules (20) et (21).

Dans ces formules, on suppose que la fonction $f(x)$ a été multipliée par un polynome
$$1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p$$
tel que le produit
$$(1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p)\, f(x) = \frac{1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p}{\psi(x)}$$

manque des termes en $x^{m+p}, x^{m+p+1}, \dots, x^{m+2p-1}$, et la quantité

(21)
$$\mathrm{H} = \frac{D_{m,p}}{D_{m,p-1}}$$

est égale au coefficient de x^{m+2p}.

Nous égalerons donc le produit $f(x) \sum a'_m x^m$, non plus à 1, mais à $1 + A_m^{(1)} x + \dots + A_m^{(p)} x^p$, en faisant

$$a'_{m+2p} = \mathrm{H},$$

et nous aurons les équations

$$
\begin{aligned}
&1 = C_0 a'_0,\\
&0 = C_{p+1} a'_0 \quad + C_p \quad a'_1 + \ldots + C_0 a'_{p+1},\\
&0 = C_{p+2} a'_0 \quad + C_{p+1} a'_1 + \ldots + C_1 a'_{p+1} + C_0 a'_{p+2},\\
(33)\quad &0 = C_{m+p-1} a'_0\\
&0 = C_{m+p} a'_0\\
&\\
&0 = C_{m+2p-1} a'_0\\
&0 = C_{m+2p} a'_0 \qquad \ldots + \qquad HC_0
\end{aligned}
$$

Nous n'avons pas écrit les équations obtenues par la comparaison des coefficients de $x, x^2, \ldots, x^p$, car elles ne serviraient qu'à donner la valeur des paramètres auxiliaires $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots, A_m^{(p)}$. Les $m + p + 1$ équations-restantes donnent

$$
(34) \qquad H = (-1)^{m} \, \frac{E_{m,p}}{\ldots}
$$

en posant

$$
(35) \qquad E_{m,p} = \begin{vmatrix}
C_{p+1} & C_p & \ldots & C_0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
C_{p+2} & C_{p+1} & \ldots & C_1 & C_0 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
C_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_0\\
C_{m+p} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_1\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
C_{m+2p} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & C_{p+1}
\end{vmatrix}
$$

Ainsi la quantité $\dfrac{C_0^{\ldots} D_{m,p}}{(-1)^{mp+\frac{p(p+1)}{2}} E_{m,p}}$ ne change pas quand on augmente ou diminue p d'une unité, m restant le même. Or, pour $p = 0$, elle est égale à $\frac{(-1)^m}{C_0^{m+1}}$, d'après la formule (32). On a donc

$$
(36) \qquad D_{m,p} = (-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{C_0^{m+2p+1}}.
$$

Telle est l'expression de $D_{m,p}$, qu'il suffira de reporter dans la formule (28) pour calculer la racine ξ.

25. Au lieu de considérer la limite supérieure de $\sqrt[m]{|a_m|}$, pour

déterminer le rayon de convergence, il revient au même, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (n° 5), de chercher la limite supérieure

m

La recherche des discontinuités polaires situées sur le cercle de convergence peut, dès lors, être regardée comme un cas particulier du problème suivant, que nous allons traiter et dont la solution nous sera utile plus tard :

Étant données la série

$$(2)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et une fonction positive

$$M = \varphi(m),$$

qui augmente constamment et indéfiniment avec m, *mais de telle façon que* $\frac{L\varphi(m+1)}{L\varphi(m)}$ *tende vers* 1, *soit* ω *la limite supérieure pour* m *infini, de* $\frac{L|a_m}{LM}$

Exprimer qu'en multipliant la série (2) *par un polynome de degré* p *convenablement choisi*

$$(12)\qquad \mathcal{P}_p = 1 + A^{(1)}x + A^{(2)}x^2 + \ldots + A^{(p)}x^p,$$

on peut diminuer la valeur de cette limite supérieure, c'est-à-dire qu'en opérant sur la nouvelle série

omme sur la première et formant la limite supérieure de $\frac{L|b_m}{LM}$ *n trouvera une quantité* ω' *plus petite que* ω.

Afin de simplifier l'écriture, nous conviendrons de représenter ndistinctement par la lettre θ divers nombres de module inférieur ι 1, et par la lettre ε différents nombres infiniment petits pour n infini. Nous pourrons écrire, avec cette nouvelle notation,

$$37)\qquad b_m = a_{m+p} + A^{(1)} a_{m+p-1} + \ldots + A^{(p)} a_m = \theta M^{\omega'+\varepsilon}.$$

Dans cette égalité, remplaçons m successivement par $m_0, m_1, \ldots, m_p,$

où $m_0, m_1, \ldots, m_p$ sont $p+1$ entiers tous très grands. Nous aurons

$$a_{m_0+p} + A^{(1)} a_{m_0+p-1} + \ldots + A^{(p)} a_{m_0} = \theta M_0^{\omega'+\varepsilon},$$

$$a_{m_p+p} + A^{(1)} a_{m_p+p-1} + \ldots + A^{(p)} a_{m_p} = \theta M_p^{\omega'+\varepsilon}.$$

Nous considérerons maintenant le déterminant d'ordre $p+1$

(38)

Chaque colonne de ce déterminant correspond, comme on le voit, à l'un des indices $m_0, m_1, \ldots, m_p$. Le mineur relatif à l'élément a_{m_i+k}, pris dans la colonne correspondant à l'indice m_i, étant désigné par la notation $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$, la formule (37) montre que notre déterminant peut se mettre sous la forme

$$\overline{\partial(0,p)}\, v_{m_0} + \overline{\partial(1,p)}\, v_{m_1} + \ldots + \overline{\partial(p,p)}\, v_{m_p}.$$

Il y aura donc au moins une valeur de i pour laquelle on aura

$i, p)$

et, par conséquent,

$\Delta^{(p)}$

d'où la conclusion suivante :

Si, pour chaque déterminant $\Delta^{(p)}_{m_0,\ldots,m_p}$, on prend la plus petite des quantités $\frac{1}{LM_i} L$ $\Delta^{(p)}$ *la limite supérieure, pour $m_0, \ldots, m_p$ infinis*

$i, k)$

n° 3) *du résultat ainsi obtenu* ([1]) *devra être plus petite que ω, au*
à ω'.

([1]) Nous considérons tous les quotients $\frac{\Delta}{\left(\frac{\partial \Delta}{\partial(i,k)}\right)}$ au lieu de nous en tenir,

26. Réciproquement, supposons que cette condition soit vérifiée pour une certaine valeur de p, et que l'on arrive, en suivant la marche indiquée ci-dessus, à une limite supérieure moindre que ω. Nous pouvons admettre que cette valeur de p est la plus petite pour laquelle il en soit ainsi, et que par conséquent il existe des déterminants $\Delta^{(p-1)}_{m_0, \ldots, m_{p-1}}$ à indices tous aussi élevés qu'on le veut, tels que chacun des quotients $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\left[\frac{\partial \Delta^{(p-1)}}{\partial \dots}\right]}$ soit supérieur à $M_i^{(p-2)}$.

Pour abréger, nous donnerons à ces déterminants le nom de *déterminants principaux*. Ainsi, l'on a, pour un déterminant principal,

$$(i, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Au lieu du déterminant $\Delta^{(p-1)}$, nous introduisons un déterminant $\mathcal{D}$, défini de la façon suivante :

Au-dessous du déterminant $\Delta^{(p-1)}$, écrivons la ligne $a_{m_0+p}, \ldots, a_{m_{p-1}+p}$.

Nous formons ainsi un tableau rectangulaire

(39)

$\mathcal{D}$ sera le plus grand déterminant déduit de ce tableau rectangulaire par la suppression d'une des lignes, soit la ligne de rang h.

Le nombre h ne pouvant avoir que $p+1$ valeurs, il est clair qu'on pourra toujours trouver des déterminants principaux à indices augmentant tous indéfiniment, et pour lesquels h ait la même valeur. Provisoirement, nous ne nous occuperons que de déterminants principaux choisis de cette façon, c'est-à-dire pour lesquels h aura une valeur déterminée, la même pour tous.

Le mineur de $\mathcal{D}$ relatif à l'élément a_{m_i+k}, pris dans la colonne

comme notre raisonnement nous l'indiquait, à ceux pour lesquels le nombre k est égal à p. Il est clair que la conclusion donnée dans le texte subsiste *a fortiori* dans ces nouvelles conditions.

correspondant à l'indice m_i, sera encore désigné par la notation $\frac{\partial \varpi}{\partial(i, k)}$,

Le déterminant ϖ *jouira de la même propriété que le déterminant* $\Delta^{(p-1)}$ et l'on aura aussi

$$\varpi$$

Considérons, en effet, l'un des mineurs $\frac{\partial \omega}{\partial(i, k)}$ que nous pouvons supposer différent de o, sans quoi le quotient correspondant serait infini, ce qui est une manière de vérifier l'inégalité (40). Nous pouvons déterminer des paramètres λ_j (j prenant toutes les valeurs de o à p, les valeurs h et k exceptées) par les $p - 1$ équations

$$\sum \lambda_j a_{m_1+j} = a_{m_1+k},$$

(41) $$_j a_{m_{i-1}+j} = a_{m_{i-1}+k},$$

$$\sum \lambda_j a_{m_{i+1}+j} = a_{m_{i+1}+k},$$

et, si Q désigne le quotient on aura

mais, d'autre part, ϖ étant différent de o, on peut déterminer les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{h+1}, \alpha_{h-1}, \ldots, \alpha_p$ par les p équations

$$a_{m_0+h} = \alpha_0 a_{m_0} + \alpha_1 a_{m_0+1} + \ldots +$$

$$_{+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_i+h+1} + \ldots + \alpha_p a_n$$

. . . .

$$_1 a_{m_{p-1}+h-1} + \alpha_{h+1} a_{m_{p-1}+h+1} + \ldots + \alpha_p a_n$$

et même, à cause des hypothèses faites sur le déterminant ϖ, tous les coefficients α seront plus petits que 1 en valeur absolue. Le coefficient α_p est d'ailleurs différent de 0, sans quoi le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ serait nul ; en sorte que nous pouvons résoudre les équations (43) par rapport à $a_{m_0+p}, a_{m_1+p}, \ldots, a_{m_{p-1}+p}$ respectivement. Ces valeurs, transportées dans les équations (41) et (42), donnent les relations

$$ {}_1 a_{m_0+1} + \ldots + \quad {}_{m_0+p-1} = 0, $$

(44)

$$ {}_{1 \cdot p-1} = 0, $$

Les coefficients μ_h et μ_k, ayant respectivement pour valeurs

$$ \mu_h = \frac{\lambda_p}{\alpha_p}, \qquad \mu_k = -1 - \frac{\lambda_p}{\alpha_p}\alpha_k, $$

sont liés par la relation

(45) $$ \mu_k + \alpha_k \mu_h = -1, $$

d'où résulte que l'un au moins de ces coefficients μ_h et μ_k est supérieur à $\frac{1}{2}$, puisque α_k est plus petit que 1. Or, les deux quotients $\frac{\Delta^p}{\frac{\partial \Delta^{p-1}}{\partial(i, h)}}$ égaux respectivement, d'après les équations (44),

à $\frac{Q}{\mu_h}$ et $\frac{Q}{\mu_k}$, sont supérieurs à $M_i^{\omega-\varepsilon}$. Il en est donc de même pour Q, ainsi que nous l'avions annoncé.

27. Cela posé, au tableau rectangulaire (39), adjoignons une dernière colonne composée des éléments

m_p désignant un indice très grand, mais plus petit que chacun des indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$. Nous obtenons un déterminant $\Delta^{(p)}_{m_0, m_1, \ldots, m_p}$. Par

hypothèse, ce déterminant contient un mineur $\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$ tel que le quotient $\frac{\Delta^{(p)}}{\left[\frac{\partial\Delta^{(p)}}{}\right]}$ soit plus petit que $M_i^{\omega'+\varepsilon}$.

Si d'abord i est égal à p, on peut supposer, d'après la manière dont nous avons formé le déterminant $\mathcal{D}$, que le mineur en question n'est autre que $\mathcal{D}$.

Supposons maintenant que i soit différent de p. On peut d'abord prendre $k = h$; car, si k est différent de h, l'identité bien connue entre les mineurs d'un déterminant nous donne

$$\frac{}{\partial(i,k)} - \frac{}{\partial(p,k)}\,\frac{}{\partial(i,h)} - \Delta\,\frac{}{\partial(i,k)},$$

égalité dans laquelle les remarques précédentes permettent de remplacer $\Delta^{(p)}$, $\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(p,k)}$, $\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial(i,k)}$ respectivement par $\theta\,\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}\,M_i^{\omega'+\varepsilon}$, $\theta\mathcal{D}$, $\frac{\theta\mathcal{D}}{M_i^{\varphi-\varepsilon}}$, ce qui conduit à

$$i,\,h) \qquad \overline{i,\,k)} \qquad i,\,k)$$

Nous pouvons donc substituer le mineur $\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$ au mineur $\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,k)}$.

Mais au mineur $\frac{\partial\Delta^{(p)}}{i,\,k)}$ on peut substituer le déterminant $\mathcal{D}$. En effet, l'élément a_{m_p} peut se mettre sous la forme $\theta M_p^{\omega+\varepsilon}$, et l'on peut écrire sous cette même forme les coefficients $a_{m_p+1}, \ldots, a_{m_p+p}$, à cause des hypothèses faites sur la fonction $\varphi(m)$. Le déterminant $\frac{\partial\Delta^{(p)}}{\partial(i,h)}$ étant égal à

$$\frac{}{\partial(i,0)}\,a_{m_p} + \frac{}{\partial(i,1)}\,a_{m_p+1} + \ldots$$
$$+ \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial(i,h-1)}\,a_{m_p+h-1} + \frac{\partial\mathcal{D}}{\partial(i,h+1)} \qquad \ldots +$$

il existe au moins un indice j tel que soit moindre que $M_p^{\omega+\varepsilon}$. Or, $\mathcal{D}$ est supérieur à $\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial(i,j)}\,M_i^{\varphi-\varepsilon}$. On a

$$\left|\frac{}{\partial(i,h)}\right| \quad {}^{\omega+\varepsilon},$$

et cette inégalité, comparée à l'hypothèse

$$\Delta^{(p)} | < \quad \overline{i, h)} |^{M_i}$$

nous donne

$$\frac{^{(p)}}{\mathcal{D}} \qquad \frac{M_p^{(0)+\varepsilon}}{}$$

d'où, *a fortiori*,

(46) $$\frac{\Delta^{(p)}}{\mathcal{D}}$$

puisque nous avons supposé m_i plus grand que m_p, et par suite M_i plus grand que M_p.

En un mot, on peut toujours supposer que le mineur $\frac{\partial \Delta^{(p)}}{\partial(i, k)}$ n'est autre que $\mathcal{D}$.

Si nous envisageons le système des paramètres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_p$, définis par les équations (43), cette inégalité (46) montre que, pour tout indice n plus petit que chacun des entiers $m_0, \ldots, m_{p-1}$, on a

(47) $$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n+1} + \ldots + \alpha_{h-1} \qquad {}_{+h+1} + \ldots + \alpha_p a_{n+p} \quad a_{n+h}$$

28. Soit, à présent, un second déterminant principal $\Delta^{(p-1)}_{n_0 n_1 \ldots n_{p-1}}$, les indices $n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}$ étant tous très grands, mais cependant inférieurs aux indices $m_0, \ldots, m_{p-1}$. A ce déterminant $\Delta^{(p-1)}_{n_0 n_1 \ldots n_{p-1}}$ correspond un déterminant $\mathcal{D}'$ se déduisant du nouveau déterminant comme $\mathcal{D}$ se déduisait de l'ancien, en faisant intervenir un indice h que nous supposerons être le même dans les deux cas, conformément à ce qui a été dit plus haut. On peut, avec cette nouvelle série d'indices, former un système d'équations analogues aux équations (43)

(43′)

$$_{h-1} +$$

Si maintenant, dans l'équation (47), nous remplaçons n successivement par $n_0, n_1, \ldots, n_{p-1}$, nous obtenons p nouvelles équations

que le système (43′) permet de mettre sous la forme

$$(48)\quad \begin{cases} (\alpha_0 - \alpha'_0)a_{n_0} + (\alpha_1 - \alpha'_1)a_{n_0+1} + \ldots - \alpha'_p)a_{n_0+p} = \theta N_0^{\omega'+\varepsilon}, \\ \ldots \\ (\alpha_0 - \alpha'_0)a_{n_{p-1}} \ldots \end{cases}$$

Résolvons ces équations par rapport à $\alpha_0 - \alpha'_0$, $\alpha_1 - \alpha'_1$, ..., $\alpha_p - \alpha'_p$ en ayant égard aux relations

$$\gamma' \partial(i, k)$$

nous voyons que, si n_0 est le plus petit des entiers n_0, ..., n_{p-1}, on a, pour chaque valeur de λ,

$$(49)\qquad \alpha_\lambda - \alpha'_\lambda = \frac{\theta}{N_0^{\omega-\omega'+\varepsilon}}.$$

Cette conclusion a été établie en supposant que tous les n sont plus petits que chacun des m. Mais elle subsiste pour tout système de valeurs suffisamment grandes des m et des n. Car on peut prendre un déterminant principal auxiliaire formé avec des indices plus grands à la fois que les m et que les n. Si α''_0, ..., α''_{h-1}, α''_{h+1}, ..., α''_p désignant les quantités analogues aux α et aux α' calculées à l'aide de ce nouveau déterminant principal, l'équation (49), ayant lieu pour les différences $\alpha''_\lambda - \alpha_\lambda$ d'une part et $\alpha''_\lambda - \alpha'_\lambda$ d'autre part, est aussi vérifiée par $\alpha_\lambda - \alpha'_\lambda$.

Il en résulte que α_λ tend vers une limite quand les indices m_0, ..., m_{p-1} augmentent tous indéfiniment sans que le déterminant

$$\Delta^{(p-1)}_{m_0, m_1, \ldots, m_{p-1}}$$

cesse d'être un déterminant principal.

La limite de α_λ étant désignée par $-A^{(p-\lambda)}$, on a, pour n très grand, la relation

$$(50)\qquad A^{(p)}a_n + A^{(p-1)}a_{n+1} + \ldots + A^{(0)}a_{n+p} + a_{n+h} = \theta N^{\omega'+\varepsilon},$$

car la quantité $N^{\omega'+\varepsilon}$, étant supérieure à

d'après la formule (47), est aussi supérieure à sa limite.

On en conclut tout d'abord que $A^{(0)}$ n'est pas nul, sans quoi, en raisonnant sur la formule (50) comme nous avons raisonné au n° 25

sur la formule (37), on démontrerait pour le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ une conclusion analogue à celle que nous y avons établie pour le déterminant $\Delta^{(p)}$, ce qui serait contraire à nos hypothèses. Le rapport $\frac{\Delta^{(p-1)}}{\varpi}$ tend donc vers une limite finie et différente de o, et, par conséquent, la relation (46) subsiste en y remplaçant ϖ par $\Delta^{(p-1)}$. Comme toutes les propriétés précédentes découlent de cette relation combinée avec la formule (40), on peut substituer, dans les considérations que nous venons de développer, le déterminant $\Delta^{(p-1)}$ au déterminant ϖ, et supposer $h = p$. Dans ces conditions, la relation (50) devient

$$+ \ldots + \Lambda^{(1)} a \qquad + a_{n+p} = \theta N^{\omega'+\varepsilon}$$

Cette relation n'étant autre que la relation (37), nous avons démontré que *la condition nécessaire trouvée au n° 25 est aussi suffisante.*

Pour obtenir les coefficients A, on voit qu'il faut choisir des déterminants principaux à indices de plus en plus élevés et résoudre les équations (43) correspondantes.

Nous nous étions borné aux déterminants principaux pour lesquels l'indice h avait la même valeur; mais cette restriction n'a plus de raison d'être, puisque nous avons vu qu'on peut toujours supposer $h = p$.

En prenant comme valeurs approchées les quantités α calculées à l'aide d'un déterminant principal quelconque, on commet sur chaque coefficient une erreur moindre que $\frac{1}{M_0^{\omega-\omega'-\varepsilon}}$, si m_0 est le plus petit des indices qui servent à former le déterminant principal.

Dans le cas où le nombre p est égal à 1, les déterminants $\Delta^{(p-1)}$ se réduisent aux coefficients a_m eux-mêmes. Si l'on écrit le polynome $\mathfrak{P}$ sous la forme $\mathfrak{P} = 1 - \frac{x}{x_0}$, on voit que x_0 est la limite de $\frac{a_m}{a_{m+1}}$ mais en se bornant aux valeurs principales de a_m, c'est-à-dire à celles pour lesquelles le rapport $\frac{\mathrm{L}\,|a_m|}{\mathrm{L}\,\mathrm{M}}$ est très voisin de ω. Si l'on ne prenait pas cette précaution, on pourrait ne plus arriver au résultat cherché, ainsi que nous le constaterons sur un exemple.

Dans le cas simple par lequel nous avons commencé et qui correspond à l'hypothèse $\varphi(m) = e^m$, cette difficulté ne se présentait pas; nous avons vu que tous les déterminants $\Delta^{(p-1)}$ à indices consécutifs étaient des déterminants principaux.

29. Les paramètres μ et α peuvent s'exprimer par des quotients de déterminants. On a déjà, en effet,

$$\ldots = \frac{\varpi}{\ldots}, \qquad \ldots = \frac{Q}{\ldots} \quad \partial\Delta^{(p-1)} \qquad \ldots = \frac{Q}{\ldots}$$

et la résolution des équations (43) donne la valeur de α_k.

Ces expressions, reportées dans l'égalité (45), donnent une relation qui peut s'énoncer, d'une façon générale, sous la forme suivante :

Soit donné un tableau rectangulaire

$$\begin{matrix} & \ldots, & l_2, \\ a_3 & & \\ & \ldots, & l_{p+1}, \end{matrix} \tag{51}$$

comprenant p colonnes et $p+1$ lignes. En supprimant la première ligne, on forme un déterminant d'ordre p

$$\ldots \quad l_3$$

En supprimant la seconde ligne, on forme de même le déterminant

$$\begin{matrix} a_3 & b_3 & & \\ a_4 & b_4 & & \\ & b_5 & \ldots & l_5 \\ & & & l_{p+1} \end{matrix}$$

où nous avons interverti les lignes de façon que le déterminant $\Delta_{3,1}$ se déduise du déterminant $\Delta_{2,3}$ par une permutation circulaire effectuée entre les lignes première, seconde et troisième du tableau (51). Enfin, la suppression de la troisième ligne fournit pareillement le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & l_2 \\ a_4 & b_4 & \ldots & l_4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p+1} & \ldots & \ldots & l_{p+1} \end{vmatrix}$$

Supprimons maintenant la deuxième et la troisième ligne, en même temps que la première colonne; puis la troisième et la première ligne; puis les deux premières; nous obtenons les trois déterminants d'ordre $p - 1$

$$
\begin{array}{llll}
b_1 & & & \\
 & & \cdot\cdot & l_4 \\
 & & & \\
b_{p+1} & \cdot\cdot & \cdots & l_{p+1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
b_2 & c_2 & \cdots & l_2 \\
b_4 & c_4 & \cdots & l_4 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\
b_{p+1} & \cdot\cdot & \cdots & l_{p+1}
\end{array}
$$

$$
\delta_3 = \begin{array}{llll}
b_3 & c_3 & \cdots & l_3 \\
b_4 & c_4 & \cdots & l_4 \\
\cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\
b_{n+1} & \cdot\cdot & \cdots & l_{n+1}
\end{array}
$$

Cela posé, on aura

Ce fait peut se ramener à un autre bien connu, en mettant à gauche du tableau (51) une colonne formée tout entière de zéros, à l'exception du troisième élément qui sera égal à 1. On obtient ainsi un déterminant

$$
\begin{array}{ll}
0 & a_1 \\
0 & a_2 \\
1 & a_3 \\
0 & a_4
\end{array}
$$

égal à $\Delta_{1,2}$. Les mineurs relatifs aux deux premiers éléments nuls sont respectivement $\Delta_{2,3}$ et $\Delta_{3,1}$, tandis que les mineurs correspondant aux éléments a_1 et a_2 sont δ_2 et $-\delta_1$. Entre ces quatre mineurs existe bien la relation

car la suppression des deux premières lignes et des deux premières colonnes donne le déterminant δ_3.

30. On peut étendre la relation précédente à une substitution circulaire de $n+1$ lettres, n étant un entier quelconque au plus égal à p. Dans ce cas, il faudra, pour former le déterminant Δ, supprimer la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne, et, pour obtenir le déterminant δ, supprimer les n premières lignes en même temps que les $n-1$ premières colonnes du tableau (51). La somme des valeurs que prend le produit $\Delta\delta$, lorsqu'on permute circulairement les $n+1$ premières lignes du tableau (51), est encore nulle si n est pair. Lorsque n est impair, il faut, pour obtenir une somme nulle, faire précéder les termes alternativement du signe $+$ et du signe $-$. En un mot, dans tous les cas, on multipliera chaque valeur par $+1$ ou par -1 suivant que la substitution qui a servi à l'obtenir appartient ou non au groupe alterné, et la somme

$$
\begin{aligned}
S_{n,p} = {} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & \dots & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \dots & \dots & l_n \\ a_{n+2} & \dots & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} h_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \dots \\
& + (-1)^{\mu n} \begin{vmatrix} a_{n-\mu+2} & \dots & l_{n-\mu+2} \\ a_{n-\mu+3} & \dots & l_{n-\mu+3} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_1 & \dots & l_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-\mu} & \dots & l_{n-\mu} \\ a_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} h_{n-\mu+1} & \dots & l_{n-\mu+1} \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \dots \\
& + (-1)^{n} \begin{vmatrix} a_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} h_1 & \dots & l_1 \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

sera identiquement nulle.

Tout d'abord ceci a lieu pour $n = 2$, ainsi que nous venons de le voir. Pour $p = n$, le déterminant δ se réduit à un seul élément, et il vient

$$S_{n\,n} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & l_1 \\ .. & \dots & .. \\ a_n & \dots & l_n \end{vmatrix} l_{n+1} + (-1)^n \begin{vmatrix} a_{n+1} & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & l_1 \\ .. & \dots & .. \\ a_{n-1} & \dots & l_{n-1} \end{vmatrix} l_n$$

$$+ \begin{vmatrix} a_n & \dots & l_n \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ a_1 & \dots & l_1 \\ .. & \dots & .. \\ a_{n-2} & \dots & l_{n-2} \end{vmatrix} l_{n-1} + \dots = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & l_1 & l_1 \\ a_2 & \dots & l_2 & l_2 \\ .. & \dots & .. & .. \\ a_{n+1} & \dots & l_{n+1} & l_{n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, si l'on veut démontrer notre proposition pour certaines valeurs de n et de p, on peut la supposer établie, d'une part pour les sommes $S_{n,p-1}$, d'autre part pour les sommes $S_{n-1,p-1}$.

Or, la somme $S_{n,p}$ est une fonction linéaire et homogène de $a_1, \dots, a_{p+1}$.

a_1 est multiplié par la somme

$$\begin{vmatrix} b_2 & \dots & l_2 \\ b_3 & \dots & l_3 \\ .. & \dots & .. \\ b_n & \dots & l_n \\ b_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix}$$

$$-(-1)^n \begin{vmatrix} b_{n+1} & \dots & l_{n+1} \\ b_2 & \dots & l_2 \\ .. & \dots & .. \\ b_{n-1} & \dots & l_{n-1} \\ b_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_n & \dots & l_n \\ h_{n+2} & \dots & l_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{p+1} & \dots & l_{p+1} \end{vmatrix} + \dots$$

qui est précisément une somme $S_{n-1,p-1}$; et il en est de même pour a_2, $a_3, \dots, a_{n+1}$.

Considérons maintenant un élément a dont l'indice soit supérieur à $n + 1$, soit a_{p+1} par exemple. Pour avoir le coefficient de a_{p+1}, il faudra supprimer la dernière ligne et la première colonne dans le

déterminant Δ et dans ses transformés. La dernière ligne du tableau (51) continuera à être représentée par les éléments $h_{p+1}, \ldots, l_{p+1}$ qui figurent dans le déterminant δ. On pourra développer encore par rapport à ces derniers éléments et l'on trouvera, pour le coefficient de chacun d'eux, une somme $S_{n,p-1}$.

Ces différents coefficients pouvant être supposés nuls, ainsi qu'il a été remarqué précédemment, il en est de même pour $S_{n,p}$, comme nous voulions le démontrer.

On pourrait même aller plus loin et, au lieu d'opérer simplement la substitution circulaire précédente, effectuer successivement toutes les substitutions d'un groupe de degré $n+1$ contenant cette substitution. La somme des valeurs du produit $\Delta\delta$, précédées chacune du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la substitution correspondante serait ou non alternée, s'annulerait toujours. Car, si Γ désigne le groupe formé par les puissances de notre substitution circulaire, on sait que les substitutions du groupe donné seront données par un tableau de la forme

$$\Gamma, \quad T_1\Gamma, \quad T_2\Gamma, \quad \ldots, \quad T_{r-1}\Gamma,$$

où $1, T_1, \ldots, T_{r-1}$ désignent r substitutions. Or, en appliquant à notre produit $\Delta\delta$ les substitutions $T_1\Gamma$, on obtient la transformée de $S_{n,p}$ par la substitution T (multipliée par $+1$ ou -1 suivant que T_1 est alternée ou non), et ainsi des autres. Ces différentes transformées étant nulles, puisque l'égalité $S_{n,p}=0$ est une identité, notre conclusion est établie. Par exemple, la somme considérée sera nulle pour tout groupe transitif de degré premier, car un pareil groupe contient toujours une substitution circulaire.

Enfin, au lieu du déterminant δ, on peut considérer un déterminant Δ' obtenu, non plus en supprimant $n-1$ colonnes du tableau (51), mais en lui laissant toutes ses colonnes et lui ajoutant $n-1$ lignes composées d'éléments arbitraires. Car ce déterminant est égal à une somme de déterminants δ multipliés par des coefficients qui ne dépendent que des lignes ajoutées et, par suite, les conclusions obtenues pour le produit $\Delta\delta$ s'appliquent au produit $\Delta\Delta'$.

ÉTUDE

SUR LES

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ENTIÈRES

ET EN PARTICULIER

D'UNE FONCTION CONSIDÉRÉE PAR RIEMANN [1]

(*Journal de* *iques*, 4e série, t. IX,

1. La décomposition d'une fonction entière x) en facteurs primaires, d'après la méthode de M. Weierstrass,

$$\text{(1)} \qquad F(x) = e^{G(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_p}\right) e^{Q_p(x)}$$

a conduit à la notion du genre de la fonction F.

On dit que F est du genre E si, dans le second membre de l'équation (1), tous les polynomes Q_p sont de degré E, et que la fonction entière $G(x)$ se réduise également à un polynome de degré E au plus.

Dans un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de*

[1] Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un travail couronné en 1892 (Grand Prix des Sciences mathématiques).

France (1), M. Poincaré a démontré une propriété des fonctions de genre E. L'énoncé auquel il est parvenu est le suivant :

Dans une fonction entière de genre E, *le coefficient de* x^m, *multiplié par la racine* $(E+1)^{\text{ième}}$ *du produit des* m *premiers nombres, tend vers zéro quand* m *croît indéfiniment.*

Je me propose de compléter ce théorème en étudiant, d'une façon générale, les relations qui lient les propriétés d'une fonction entière à la loi de décroissance des coefficients et, particulièrement, en démontrant la proposition inverse :

Si le coefficient de x^m *est moindre que* $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, *la fonction est, en général, de genre moindre que* λ.

PREMIÈRE PARTIE.

Relations entre la loi de décroissance des coefficients et l'ordre de grandeur de la fonction pour les grandes valeurs de la variable.

2. Le développement taylorien d'une fonction entière est caractérisé (2) par cette circonstance que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Si donc une fonction entière F (x) est donnée par le développement

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

le module de a_m peut être représenté par $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ où $\varphi(m)$ est positif et infini avec m.

Pour obtenir une quantité supérieure au module de F(x), nous remplacerons chaque terme de la série (2) par son module, de sorte

(1) Année 1883, p. 136 et suiv.

(2) Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, n° 6 (*Journ. de Math.*, 4e série, t. VIII).

que nous pourrons considérer a_m comme égal à $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ et x comme réel et positif.

Nous supposerons, en outre, que $\varphi(m)$ est une fonction continue et croissante, avec cette condition que $L\varphi(m) + \frac{k}{m}$ soit, à partir d'une certaine valeur de m, constamment croissant, quel que soit le nombre k.

Dans les cas usuels, ces hypothèses se trouvent vérifiées d'elles-mêmes; mais on peut les supposer vérifiées dans le cas le plus général, à la condition de remplacer, d'une manière convenable, certains coefficients a_m par des nombres plus grands, ce qui est permis, puisque nous agrandissons ainsi la somme de la série (2).

En un mot, on peut déterminer une fonction $\chi(m)$ au plus égale, pour les valeurs entières de m, au module de $\frac{1}{a_m}$ (l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs) et telle que la fonction

$$(3) \qquad \varphi(m) = \sqrt[m]{\chi(m)}$$

satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer.

3. A cet effet, soit a_{m_0} le premier coefficient non nul. La quantité $\left|\sqrt[m-m_0]{\frac{a_m}{a_{m_0}}}\right|$, diminuant indéfiniment à mesure que m augmente, doit prendre nécessairement une valeur plus grande que toutes les autres. Soit m_1 l'indice correspondant. Pour les valeurs entières de m comprises entre m_0 et m_1, nous prendrons comme valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_0}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_1}|}$, dont la raison sera, par suite, $\left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$; ce qui revient (en faisant intervenir non seulement les valeurs entières de m, mais les valeurs fractionnaires ou incommensurables) à prendre pour $\chi(m)$ une certaine exponentielle de la forme e^{am+b}, où l'on aura $a = \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$.

Soit de même m_2 l'indice plus grand que m_1 pour lequel la quantité $\left|\sqrt[m-m_1]{\frac{a_m}{a_{m_1}}}\right|$ prend la plus grande valeur. Entre $m = m_1$ et $m = m_2$, on prendra pour valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progres-

sion géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_1}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_2}|}$.

La raison de cette progression, à savoir sera plus grande que la précédente, car l'inégalité

$$\left|\sqrt[m_2-m_0]{\frac{a_{m_2}}{a_{m_0}}}\right| < \left|\sqrt[m_1-m_2]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_0}}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_1-m_0} \left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}\right|^{m_1-m_0} > \left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_2-n}$$

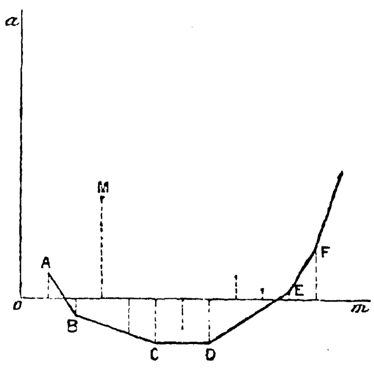
peut s'écrire

$$\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right| > \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|.$$

On considérera ensuite la valeur m_3 de m pour laquelle $\left|\sqrt[m-m_2]{\frac{a_m}{a_{m_2}}}\right|$ sera le plus grand, et l'on continuera ainsi indéfiniment.

4. Au reste, ces opérations peuvent se ramener à la construction bien connue du polygone de Newton.

Pour cela on considérera m comme l'abscisse d'un point M (*fig.* 1) dont l'ordonnée sera fournie par la valeur correspondante de L



Nous aurons ainsi une suite indéfinie de points représentant les différents coefficients de notre série.

Prenons alors une demi-droite, tout d'abord parallèle à la partie

négative de l'axe des y, et que nous ferons tourner autour du premier point représentatif dans le sens trigonométrique jusqu'à ce qu'elle passe par un ou plusieurs des points suivants. Ce sera le premier côté AB de notre polygone. Pour obtenir le second, nous considérerons une droite issue du point B et que nous ferons tourner autour de ce point, etc.

Continuant ainsi à la manière ordinaire, nous tracerons une ligne brisée convexe ABC... d'une infinité de côtés, qui passera par une infinité de points représentatifs et laissera tous les autres en dessus. Les coefficients angulaires des côtés pourront être d'abord négatifs; mais, à partir d'un certain moment, ils deviendront nécessairement positifs et même de plus en plus grands.

L'ordonnée de cette ligne brisée représente le logarithme de la fonction $\chi(m)$ définie au numéro précédent, et le coefficient angulaire de OM donne la valeur de $L\varphi(m)$.

5. Nous voyons tout d'abord que $\chi(m)$ est une fonction croissante, et de manière que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit aussi croissant. Il en résulte que la fonction $\varphi(m)$, laquelle a une dérivée, sauf en des points isolés [1], est elle-même constamment et indéfiniment croissante.

En outre, m_0 étant un entier quelconque, la fonction $L\chi(m)$ est, entre $m = m_0$ et $m = m_0 + 1$, de la forme $am - b$, où

$$\begin{aligned} a &= L\chi(m_0+1) - L\chi(m_0), \\ b &= -(m_0+1)L\chi(m_0) + m_0 L\chi(m_0+1) \\ &= m_0(m_0+1)[L\varphi(m_0+1) - L\varphi(m_0)]. \end{aligned}$$

$L\varphi(m)$ étant par suite de la forme $a - \frac{b}{m}$, la quantité $L\varphi + \frac{k}{m}$ sera croissante si $b > k$. Ceci devant être vrai quel que soit le nombre k,

[1] Si l'on voulait que χ et par suite φ aient une dérivée pour toute valeur de m (ce qui n'est pas nécessaire pour la suite), il suffirait de circonscrire au polygone ABC... une courbe convexe, ce qui est évidemment possible, par exemple à l'aide d'arcs de coniques se raccordant entre eux aux sommets successifs. On verrait aisément que les autres propriétés des fonctions χ et φ subsisteraient dans ces nouvelles conditions.

pourvu que l'on prenne m_0 assez grand, nous avons à montrer que b augmente indéfiniment avec m_0.

Or, b est constamment croissant, car l'inégalité

$$m L\chi(m+1) - (m+1)L\chi(m) \geqq (m-1)L\chi(m) - mL\chi(m-1)$$

est équivalente à l'inégalité

$$L\chi(m+1) - L\chi(m) \geqq L\chi(m) - L\chi(m-1).$$

D'ailleurs, si b restait inférieur à une quantité fixe k, on aurait

$$L\varphi(m+1) - L\varphi(m) < \frac{k}{m(m+1)}$$

et, comme le second membre est le terme général d'une série convergente, φ serait fini pour m infini, ce qui est contraire à nos hypothèses.

La fonction φ, définie comme il vient d'être dit, remplit donc les conditions que nous nous sommes imposées. Nous remarquerons que, moyennant ces conditions, λ étant un nombre fixe supérieur d'aussi peu que l'on veut à l'unité, on a, pour les grandes valeurs de m,

$$(4) \qquad \frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} > 1 + \frac{1}{m},$$

car la fonction

$$\varphi(tm) - L\varphi(m) + \frac{\quad}{\lambda - \ } \quad \frac{1}{tm}$$

considérée comme fonction de t, est croissante, d'après nos hypothèses, à partir de $t = 1$, si m a été pris suffisamment grand. Étant nulle pour $t = 1$, elle sera positive pour $t = \lambda$, d'où résulte

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} \quad e^{m} \quad 1 + \frac{\ }{m}.$$

6. Cela posé, soit $\psi(x)$ la fonction inverse de φ, qui est également une fonction positive, continue et croissante d'une variable positive.

Je dis que $F(x)$ *croît moins vite que* $x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Pour le démontrer, soit x' un nombre supérieur à x. Dans la série qui représente $F(x')$, considérons le dernier terme qui soit plus

grand que 1, c'est-à-dire tel que $\varphi(m) < x'$. Son rang m_0 sera le plus grand entier contenu dans $\psi(x')$.

Ayant isolé les m_0 premiers termes pour en former un premier groupe, nous séparerons un second groupe allant depuis $m = m_0 + 1$ jusqu'à la plus grande valeur de m qui satisfasse à l'inégalité

$$\varphi(m) < x'\left(1 + \frac{1}{m_0}\right),$$

valeur qui sera désignée par m_1.

Le nombre m_0 augmentant indéfiniment avec x, le rapport $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers l'unité, car l'inégalité (4) montre que ce rapport ne saurait demeurer supérieur à aucun nombre λ plus grand que 1.

Enfin un troisième groupe comprendra ce qui reste de la série depuis le terme de rang $m_1 + 1$ jusqu'à l'infini.

Dans la combinaison $F(x') - \left(\frac{x'}{x}\right)^{m_0} F(x)$, les m_0 premiers termes donneront une somme négative. Quant aux termes suivants, le terme en x^{m_0+h} donnera

$$a_{m_0+h} x'^{m_0+h} \left[1 \quad \left(\frac{x}{x'}\right)^h \right].$$

Remplaçons $\quad = e^{hL\left(\frac{x'}{x}\right)}$ par la quantité plus petite $1 \quad hL$

nous voyons qu'il nous reste le produit de $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ par une somme de termes de la forme $ha_{m_0+h} x'^{m_0+h}$.

Considérons d'abord les termes du deuxième groupe, $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ étant inférieur à 1, la somme correspondante sera moindre que $\frac{(m_1 \quad m_0)^2}{2}$.

Or, nous pouvons supposer que $F(x')$ est supérieur à

$$e^{\int^{\psi(x')} \frac{dx'}{x'}} = e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm},$$

sans quoi le théorème serait démontré; et nous allons voir que, dans ces conditions, le rapport $\frac{(m_1 - m_0)^2}{F(x')}$ tend vers zéro.

D'abord il nous suffit de nous occuper puisque $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers 1. Or, la quantité $\varphi(m)$ est, à partir d'un certain moment,

plus grande que $\frac{3}{m}$, puisque la fonction $L\varphi(m) + \frac{3}{m}$ est croissante. Par suite, l'intégrale $e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}$ est plus grande que Am^3, A étant une constante différente de o. $F(x')$ étant supposé plus grand que $e^{\int \frac{}{\varphi(m)} dm}$, le rapport $\frac{m_0^2}{F(x')}$ tend bien vers zéro.

Dans les termes du troisième groupe, $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ est moindre que $\quad^{m_0+h}$. Ces termes donnent donc une somme inférieure à la somme $\sum_{h=0}^{\infty} h \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m_0}\right)^h} = (m_0+1)^2$, laquelle est, comme la précédente, de la forme $\varepsilon F(x')$; de sorte que l'on peut écrire

$$F(x')\left[1 - \varepsilon L\left(\frac{x'}{x}\right)\right] > F(x)\left(\frac{x'}{x}\right)^{\psi(x')}.$$

Prenons les logarithmes, divisons par $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ et faisons tendre x' vers x, nous aurons

$$\frac{dLF(x)}{dLx} < \psi(x) + \varepsilon, \tag{5}$$

ce qui, en intégrant, donne bien

$$A x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x}}$$

A étant fini.

Par exemple, pour la fonction

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2} x^m, \qquad |q| < 1$$

[qui est une moitié du développement d'une fonction $\theta(z)$ où l'on

(1) Plus exactement, nous voyons que, pour les valeurs de x plus grandes qu'une certaine limite, ou bien $F(x)$ est moindre que $e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, ou bien on a l'inégalité (5). Ceci suffit manifestement pour que l'inégalité (6) soit constamment vérifiée.

aurait posé $e^{2i\pi\frac{z}{\omega}} = x\Big]$, on a

$$\varphi(m) = r^m$$

$\left(\text{en désignant par } r \text{ le module } \frac{1}{q}\right)$; d'où

$$\psi(x) = \frac{Lx}{Lr}.$$

En appliquant le théorème précédent, on voit que $\mathcal{F}(x)$ augmente indéfiniment moins vite que $e^{\int \frac{Lx}{Lr}\frac{dx}{x}} = e^{\frac{L^2 x}{2Lr}}$, ce qui est bien conforme aux résultats fournis par la théorie des fonctions elliptiques [1].

7. Envisageons en particulier le cas où l'on a

$$|a_m| \leqq \frac{1}{(m!)^\alpha}, \tag{8}$$

α étant un nombre positif quelconque.

Les formules connues pour l'approximation de la fonction Γ nous montrent que cette expression est de la forme

$$\frac{k e^{(m+1)\alpha}}{(m+1)^{\alpha\left(m+\frac{1}{2}\right)}},$$

k étant fini, de sorte que nous pouvons prendre

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{H}\right)^\alpha,$$

H étant une constante.

$\psi(x)$ sera de la forme $Hx^{\frac{1}{\alpha}}$ et l'intégrale $\int \frac{\psi(x)-\varepsilon}{x}dx$ aura la même forme. Nous arrivons donc à l'énoncé suivant :

---

[1] Les formules connues correspondant à l'addition des périodes dans la fonction θ donnent

$$\mathcal{F}(x) < A e^{\frac{L^2 x}{4Lr}}.$$

La limite donnée par le théorème précédent est donc un peu trop élevée, ce dont il sera rendu compte plus loin.

Si le coefficient de x^m est moindre que ^{1} *la fonction croît moins vite que $e^{Hx^{\frac{1}{\alpha}}}$, où* H *est une certaine constante.*

8. Au reste, dans ce cas particulier, on arriverait à la même conclusion par la comparaison directe des deux séries

$$\sum \frac{}{\Gamma(m\alpha + 1)}$$

laquelle, en vertu des propriétés de la fonction Γ, peut être substituée dans notre raisonnement à $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}\Big)$, et

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum \frac{x^{\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma(1+n)}.$$

En posant $\frac{n}{\alpha} = m'$ et comparant les parties des deux séries qui correspondent aux valeurs de m et de m' comprises entre les mêmes limites, on reconnaît aisément que, pour $\alpha > 1$, on a

$$\sum \frac{}{\Gamma(m\alpha + 1)}$$

et, pour $\alpha < 1$,

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right) x^{\frac{1}{\alpha}} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où, bien entendu, $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}\cdot$

Enfin, si α est un nombre entier, on peut mettre ce résultat en évidence par l'emploi de la formule

$$(9)\quad \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1})}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{\alpha-1},$$

où $F_{\alpha-1}$ est une fonction finie.

On peut démontrer cette formule en partant de la remarque suivante :

Si

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

et

$$f_2(x) = b_0$$

désignent des séries entières, la valeur de la série

$$f_3(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

sera donnée par l'intégrale définie

μ désignant un exposant quelconque compris entre o et 1.

D'après cela, supposons la formule (9) démontrée pour une certaine valeur de α. Nous pourrons, dans l'égalité (10), faire $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$ avec $\mu = \frac{1}{\alpha+1}$. Cette égalité prendra bien alors la forme

$$\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha+1}} F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha)} d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_\alpha,$$

pourvu que l'on pose

$$F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha) = e^{i\theta_\alpha} + e^{-\frac{i\theta_\alpha}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1}).$$

La formule (9) conduit d'ailleurs précisément à l'évaluation précédemment obtenue pour la série $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$, car l'intégrale qui figure au second membre est évidemment plus petite que $e^{M|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$, où M est le module maximum de $F_{\alpha-1}$.

9. Inversement, on peut chercher la loi de décroissance des coefficients, connaissant la loi de croissance de la fonction pour les grandes valeurs de x.

Dans son Mémoire précédemment cité, M. Poincaré résout cette question pour le cas particulier des fonctions que nous venons de considérer aux deux numéros précédents, en introduisant une fonction entière auxiliaire [1],

(11) $$\quad(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^{\alpha}} F(tx)\, dt.$$

(1) Nous transformons, par un changement de variable, l'expression de M. Poincaré. Sous cette nouvelle forme, les fonctions (11) et (12) présentent une remarquable

l'intégrale étant prise sur la partie positive de l'axe réel ou suivant un chemin équivalent.

On peut étendre cette méthode au cas le plus général où, par exemple (V étant une fonction quelconque positive et indéfiniment croissante avec la variable), la fonction F est supposée croître moins vite que $e^{V(x)}$. Il faudra de même considérer l'intégrale

$$(12) \qquad \Phi(x) = \int_0^\infty e^{-V(\theta)} F(tx)\, dt,$$

dans laquelle θ est une fonction de t telle que le rapport $\frac{\theta}{t}$ soit infini avec t, par exemple $t Lt$ ou $t^{1+\varepsilon}$.

Cette intégrale est finie, quel que soit x, et représente une fonction entière. Il en résulte immédiatement que les coefficients a_m de $F(x)$ sont plus petits que les inverses des quantités successives

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-V(\theta)} t^m\, dt.$$

Pour voir la loi de décroissance de a_m, il suffira donc d'étudier la manière dont varie la quantité (13) lorsque m augmente indéfiniment.

Mais on peut arriver au même résultat plus directement par la simple considération des intégrales définies qui fournissent les coefficients lorsqu'on donne les valeurs de la fonction

$$a_m = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(z)\, dz}{z^{m+1}}.$$

Si, en effet, on prend pour le contour C une circonférence de rayon R,

analogie avec les expressions que j'ai considérées dans un Mémoire précédent (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, n^{os} 35-37). En cet endroit, l'intégrale est prise entre les limites 0 et 1 : la fonction ainsi obtenue n'admet alors d'autres points singuliers que ceux de **F**, et il n'est besoin que d'hypothèses très simples sur la fonction désignée par V (t). Dans le cas actuel, l'intégrale, étant prise entre 0 et ∞, est en général infinie; mais, toutes les fois qu'elle est finie, elle représente une fonction entière, ainsi qu'on le verrait par une discussion analogue à celle que j'ai présentée à l'endroit cité.

on voit que a_m est moindre que

$$\frac{e^{V(R)}}{R^m}.$$

10. Dans cette expression, le rayon R est entièrement arbitraire. Faisons $R = U(m)$, en désignant par U la fonction inverse de V; nous voyons que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\frac{e}{U(m)}$.

Pour $V(R) = R^{\frac{1}{\alpha}}$, ceci donne bien le résultat obtenu par M. Poincaré, et d'après lequel $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{e}{m^\alpha}$.

On voit encore, par ce procédé, que, dans le développement de e^{e^x}, on a

$$|a_m| < \left(\frac{e}{Lm}\right)^m;$$

et, en général, la série qui donne le développement de

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{x}}}}$$

(le nombre des exponentielles superposées étant μ) a ses coefficients plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{(ex)^m}{(LL\ldots Lm)^m}$$

(le nombre des signes L étant $\mu - 1$).

11. Mais cette manière d'opérer donne pour a_m une limite trop élevée. Pour obtenir une limite plus approchée, posons

$$V(R) = \int \frac{\psi(R)}{R}\, dR$$

et cherchons le minimum de l'expression (14). Il vient, en prenant la dérivée

$$\psi(R) = m,$$

ou bien (φ étant la fonction inverse de ψ)

$$R = \varphi(m)$$

et, pour cette valeur de R, l'expression (14) devient

$$\frac{e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm}}{\varphi(m)^m}.$$

Supposons que la fonction $\psi(x)$ croisse plus vite que $x^{\frac{1}{\alpha}}$. La fonction $\varphi(m)$ croît moins vite que m^α, de sorte que l'on a

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}}\right| > e^{-\alpha}\varphi(m).$$

Il peut arriver que la fonction ψ augmente plus vite que n'importe quelle puissance de x. Dans ce cas, on peut considérer α comme infiniment petit et écrire

$$\sqrt[m]{\left|\frac{1}{a_m}\right|} > (1-\varepsilon)\varphi(m).$$

Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° 6. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne la véritable relation cherchée.

Si la fonction ψ croît plus lentement que toute puissance de la variable, et par suite φ plus vite que n'importe laquelle de ces puissances, les transformations précédentes de l'expression (15) ne sont plus applicables.

Si $\varphi(m)$ est à croissante moins rapide que celle de e^{m^k}, on aura

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)L\varphi(m)} = \frac{d}{dm}[LL\varphi(m)] < \frac{k}{m};$$

d'où résultera

$$\frac{m\varphi'(m)}{[illegible]} < kL\varphi(m)$$

$$\frac{m\varphi'(m)}{[illegible]} < \frac{k}{k+1}\frac{d}{dm}[mL[illegible]$$

et [illegible] est moindre que [illegible]. C'est le cas de la fonction $\mathcal{F}(x)$ étudiée au n° 6.

Enfin, si la fonction φ est, pour les grandes valeurs de m, supérieure

à toute fonction de la forme e^{m^k}, on peut affirmer en tout cas que $\sqrt[m]{a_m}$ est inférieur à $\frac{1}{m}$.

En effet, l'expression (15) peut s'écrire

$$e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm - mL\varphi(m)} = e^{-\int L\varphi(m)\,dm}.$$

Or, f étant une fonction quelconque à dérivée croissante, on a

car $f(m) - f\left(\frac{m}{2}\right)$ est de la forme $\frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2} + \frac{\theta m}{2}\right)$. En intégrant [1], il en résulte

$$\int f(m)\,dm;$$

En posant $f(m) = L\varphi(m)$, on obtient bien

$$e^{-\int L\varphi(m)\,dm} < \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)^m}.$$

12. Nous allons maintenant nous occuper d'une certaine classe de fonctions qui jouent un grand rôle dans l'étude des fonctions entières : je veux parler des fonctions de la forme $e^{G(x)}$, où G est lui-même une fonction entière.

Le module d'une pareille fonction dépendant de la partie réelle de $G(x)$, nous présenterons tout d'abord quelques remarques sur la partie réelle d'une fonction entière.

Soit

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une fonction holomorphe dans un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon R; P la partie réelle de cette fonction au point $x = Re^{i\theta}$

[1] Nous négligeons la constante d'intégration, qui donne dans le résultat final un facteur constant.

de ce cercle. Le coefficient a_m sera donné par la formule

Faisons croître R indéfiniment et supposons que P reste *algébriquement* (ainsi il faut remarquer qu'il n'est rien supposé sur les valeurs négatives de P) inférieur à R^λ, où λ est un certain exposant positif, soit

$$P < R^\lambda. \tag{17}$$

Je dis que F est un polynome de degré au plus égal à λ.

Partageons, en effet, la circonférence du cercle C en deux parties : l'une C_1, formée par l'ensemble des arcs où P est positif; l'autre C_2, comprenant tous les arcs où cette quantité est négative. Soient I_1 l'intégrale $\int P\,d\theta$ considérée le long de C_1; I_2 l'intégrale $\int -P\,d\theta$ prise le long de C_2.

Le rapport $\frac{I_1}{R^m}$ tendra vers zéro pour $m > \lambda$, d'après les hypothèses faites sur P; et il en sera de même pour $\frac{I_2}{R^m}$, car la différence $I_1 - I_2$ est une constante, à savoir la partie réelle de $2\pi a_0$.

Or, la formule (16) montre que le module du coefficient a_m est inférieur à $\frac{I_1 + I_2}{R^m}$. Ce coefficient ne peut donc être que nul.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on voit que, si la partie réelle d'une fonction croît moins vite que le module de la variable, la fonction se réduit à une simple constante.

13. Nous avons supposé que l'inégalité (17) avait lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de la variable; mais nous remarquerons que cette hypothèse n'est point complètement nécessaire. Les raisonnements précédents sont valables dès que l'on peut trouver une suite infinie de circonférences C dont les rayons aillent en augmentant indéfiniment et sur lesquelles l'inégalité (17) soit vérifiée.

14. Revenons maintenant aux fonctions considérées au n° 7. Il sera préférable ici d'introduire, au lieu du nombre α, son inverse,

que nous désignerons par la lettre λ, de sorte que l'on aura, pour les grandes valeurs de x

$$|F(x)| < e^{H|x|^{\lambda}}.$$

Supposons qu'une pareille fonction soit de la forme $e^{G(x)}$: la partie réelle de $G(x)$ devra rester algébriquement plus petite que $H|x|^{\lambda}$ et, par suite, la fonction $G(x)$ ne peut être qu'un polynome. En particulier, si λ est plus petit que 1, la fonction G doit se réduire à une constante.

Ainsi, *lorsqu'une fonction* $F(x)$ *est de la forme* $e^{G(x)}$, *les coefficients de son développement ne peuvent pas décroître plus vite que* $\frac{1}{(m!)^{\alpha}}$, *à moins que* $G(x)$ *ne soit un polynome.*

Il en serait de même si $F(x)$ était de la forme $\mathfrak{P}(x)e^{G(x)}$ (la lettre $\mathfrak{P}$ représentant un polynome quelconque); car la multiplication ou la division par un polynome n'altèrent pas le fait exprimé par l'inégalité (18).

15. Les résultats précédents présentent cette particularité de ne pas changer si l'on ajoute à la fonction $F(x)$ un polynome quelconque; aussi peuvent-ils servir à démontrer, du moins pour les fonctions qui satisfont à la condition (8) (n° 7), le théorème connu de M. Picard (¹) sur les fonctions entières.

Considérons d'abord une fonction entière F dont les coefficients vérifient la condition (8) avec $\alpha > 1$. Le nombre λ sera plus petit que 1 et il sera impossible que F soit de la forme $e^{G(x)}$, du moins si G ne se réduit pas à une constante. L'équation $F = 0$ admettra donc une infinité de racines, et il en sera évidemment de même pour l'équation $F(x) = P(x)$, où P est un polynome quelconque.

C'est par exemple le cas de la fonction $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité (7), (n° 6).

16. Supposons maintenant α quelconque, et soit p l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{\alpha}$. L'identité

(19)

pourra avoir lieu, mais G devra être un polynome de degré E au plus.

Or, dans ces conditions, l'identité (19) ne peut avoir lieu de deux façons différentes, car c'est un fait bien connu que l'équation

$$\text{(20)} \qquad P(x) + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)} + P_1(x) + \mathfrak{P}_1(x)e^{G_1(x)} + \ldots = 0,$$

où $P, P_1, \ldots, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots, G, G_1$ sont des polynomes, n'admet pas d'autre solution que ses solutions banales.

On peut même ajouter que si $F_1, F_2, F_3, \ldots$ sont des fonctions entières dont les coefficients vérifient toujours la condition (8) et qui n'ont chacune qu'un nombre fini de zéros, la somme $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ aura nécessairement un nombre infini de racines, à moins que $F_1, F_2, \ldots$ ne soient identiques à des facteurs constants et à des polynomes près. Cela résulte de la même proposition relative à l'équation (20).

17. La fonction F étant donnée, on peut résoudre l'équation (19) dès que l'on connaît le degré de $P(x)$. Il suffira pour cela de différentier un nombre de fois supérieur à ce degré. Le second membre prendra la forme Qe^G (où Q sera un nouveau polynome), et, par conséquent, devra admettre un nombre fini de racines. Si l'on a obtenu ces racines, on connaîtra les polynomes Q et G, et la résolution d'équations linéaires fera connaître $\mathfrak{P}$.

En faisant, par exemple, P constant, on pourra, par ce procédé, reconnaître si l'équation

$$F = a + \mathfrak{P}e^G$$

est possible, et de la résoudre s'il y a lieu. On n'aura qu'une seule dérivée à prendre, et il viendra

$$Q = \mathfrak{P}' + G'\mathfrak{P}.$$

En égalant, dans cette identité, les coefficients de chaque puissance de x, on aura une série d'équations linéaires auxquelles devront satisfaire les coefficients de $\mathfrak{P}$.

Dans un grand nombre de cas, on pourra reconnaître immédiatement que l'équation (19) est impossible.

Faisons, par exemple,

$$F(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin\pi x.$$

D'après les propositions connues relatives à la fonction Γ, le polynome G devrait être du premier degré, ce qui est contraire à ce ait que la fonction F croît comme $|x|\mathrm{L}|x|$. Donc les équations

$$+ k \sin x = \varphi(x),$$

ont toujours une infinité de racines.

En général, pareil fait se produira toutes les fois que F augmentera plus vite que $e^{kx^{\mathrm{E}}}$ et moins vite que $e^{\frac{1}{k}x^{\mathrm{E}+1}}$, quelque grand que soit k.

18. Les considérations précédentes démontrent le théorème de M. Picard pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (8). C'est, d'après le théorème de M. Poincaré, le cas de toutes les fonctions qui ont un genre fini.

On peut étendre une partie de ces conclusions à des fonctions de genre infini au moyen d'un raisonnement devenu classique dans cette théorie. On sait, en effet, que, si la fonction

$$F(x) = e^{G(x)},$$

qui n'a aucun zéro, était telle que l'équation $F(x) = 1$ n'admette non plus aucune solution, on en conclurait immédiatement que les mêmes propriétés appartiennent à la fonction

$$F_1(x) = \frac{1}{2i\pi} G(x).$$

Si, d'ailleurs, F croît moins vite que $e^{\psi(x)}$, on peut déduire de notre théorie que F_1 croîtra moins vite que $\psi(x)$.

Formons alors la suite des fonctions

Si la fonction donnée F est dépassée par une fonction f_m de cette suite, il suffira d'appliquer m fois le raisonnement précédent pour ramener F à vérifier la condition (8).

Mais, même à l'aide de l'extension précédente, la démonstration ne s'applique pas à une fonction quelconque; car on peut former une fonction entière croissant plus vite que n'importe quelle fonction f_m. On pourra, par exemple, procéder de la façon suivante :

Ayant pris une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ qui tendent vers zéro, on appellera m_1 le plus petit entier tel que la racine $m_1^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m dans $f_1(x)$ soit plus petite que ε_1, puis m_2 le plus petit entier tel que la racine $m_2^{\text{ième}}$ du coefficient de x^{m_2} dans $f_2(x)$ soit plus petite que ε_2, et ainsi de suite.

En écrivant les termes de f_1 jusqu'au rang $m_2 - 1$, puis les termes de f_2 depuis le rang m_2 jusqu'au rang $m_3 - 1$, puis les termes de f_3 depuis le terme de rang m_3 jusqu'au terme de rang $m_4 - 1, \ldots$, on obtiendra une fonction entière qui jouira manifestement des propriétés demandées.

DEUXIÈME PARTIE.

Recherche de l'ordre de grandeur des racines et du genre.

19. Les résultats obtenus dans notre première Partie permettent de compléter les conclusions de M. Poincaré, dans le cas des fonctions de genre zéro.

Soit, en effet,

$$= \left(1 - \;-\; \right) \left(1 - \;-\right.$$

une fonction de genre zéro, et $\varphi(p)$ une fonction positive et croissante telle que le module ρ_p de x_p soit supérieur à $\varphi(p)$. Nous supposerons de plus que $\varphi(p)$ soit supérieur à p^α (où α est un nombre plus grand que 1), et cela de telle manière que le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha-\varepsilon}}$ soit croissant, mais le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha+\varepsilon}}$ décroissant.

Le module de F ne peut dépasser la quantité

$$F_0(R) = \left[1 + \frac{R}{\varphi(1)}\right]\left[1 + \frac{R}{\varphi(2)}\right] \cdots \left[1 + \frac{R}{\varphi(p)}\right] \cdots,$$

où R est le module de x.

Pour évaluer F_0, prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (21); nous trouvons

$$\frac{d}{dR} \qquad \frac{1}{\varphi(1) + R} + \frac{1}{\varphi(2) + R} \cdots + \varphi(p$$

Soit ψ la fonction inverse de φ et, dans le second membre, isolons les $p_0 = \psi(R)$ premiers termes. Leur somme sera moindre que $\frac{\psi(R)}{R}$. Quant à la somme des termes qui restent, elle est inférieure à

$$\varphi(p_0) \quad \varphi(p_0 +$$

Cette dernière quantité s'évalue à l'aide des procédés employés dans la théorie élémentaire des séries. On la remplace tout d'abord par la somme

$$(t - \qquad + \qquad +$$

où t est un nombre quelconque plus grand que 1. D'ailleurs, les hypothèses relatives à la fonction φ donnent

où $(\alpha' = \alpha - \varepsilon)$. La série (23) est donc moindre que

$$\frac{(t-1)p_0}{\varphi(p_0)} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{t^{\mu(\alpha'-1)}} = \frac{p_0}{\varphi(p_0)} \frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1}-1}.$$

Le second facteur $\frac{t^{\alpha'-1}(t-1)}{t^{\alpha'-1}-1}$ a pour limite $\frac{1}{\alpha'-1}$ lorsque t tend vers 1, de sorte que la série (23) peut être remplacée par

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1} \frac{p_0}{\varphi(p_0)} = \frac{1+\varepsilon}{\alpha-1} \frac{\psi(R)}{R}$$

Il vient donc [1]

$$\frac{d}{} \qquad \alpha \frac{+\varepsilon}{} \frac{\psi(R)}{}$$

[1] La limite ainsi obtenue est trop élevée. On peut, dans la plupart des cas, en obtenir une plus approchée en formant un second groupe avec les termes de la série (22) dont le rang est compris entre $\psi(R)$ et $2^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(R)$, lesquels sont tous plus petits que $\frac{1}{2R}$; puis un troisième groupe allant du rang $2^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(R)$ au rang $3^{\frac{1}{\alpha'}}\psi(R)$, les termes étant alors plus petits que $\frac{1}{3R}$. Après séparation d'un certain nombre de ces groupes, on calcule le reste de la série comme il a été expliqué. On trouve ainsi pour la série (22)

ou

$$F_0(R) < e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\int \frac{\psi(R)}{R}}, \tag{24}$$

20. Ainsi le module de F ne peut croître plus vite que le second membre de l'inégalité précédente.

Si maintenant nous appliquons les conclusions du n° 11, en supposant, pour fixer les idées, que α soit fini, nous voyons que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient a_m est moindre que e^{α}, ce qui

peut encore s'écrire $\varphi(m)$, puisque $\varphi(m)$ croît moins vite que $m^{\alpha+\varepsilon}$.

21. Nous allons maintenant nous occuper de la question inverse et chercher comment on peut obtenir la loi de distribution des racines quand on connaît la loi des coefficients.

Cette recherche repose sur les formules que j'ai données dans un précédent travail ([1]), et qui permettent de calculer les zéros successifs d'une fonction à l'aide des coefficients de son développement. Je vais tout d'abord résumer succinctement la marche suivie pour arriver à ces formules, en renvoyant pour les détails au Mémoire dont je viens de parler.

laissant de côté le facteur $\frac{\psi(R)}{R}$ [illegible] les limites

$$\frac{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}2^{\alpha}}{2}+\varepsilon, \qquad \frac{1}{2}+\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{6}+\frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}3^{\frac{1}{\alpha}}}{3}+\varepsilon,$$

Pour $\alpha = 2$, le coefficient de $\frac{\psi(R)}{R}$ serait (au terme ε près)

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+2\frac{\sqrt{3}}{3}=1,88\ldots$$

au lieu de 2.

([1]) *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1re et Parties (*Journ. de Math.*, 4e série, t. VIII, 1892).

On commence par introduire une définition, celle de la *limite supérieure* d'une suite telle que

$$(25)\qquad u_0,\quad u_1,\quad \ldots,\quad u_m,\quad \ldots$$

pour m infini (les u étant des nombres réels).

C'est la plus petite quantité qui ne soit pas dépassée, ou du moins soit infiniment peu dépassée par les termes de la suite (25) à indices infiniment grands; ou encore, cette limite supérieure l est le plus grand nombre jouissant de cette propriété que dans la suite (25) on puisse trouver une série indéfinie de termes tendant vers l.

Dans un grand nombre de cas, l est la seule quantité satisfaisant à cette dernière condition. Alors l est, pour la suite (25), une limite, au sens ordinaire du mot. Nous exprimerons souvent ce fait en disant que les termes de la suite (25) *tendent régulièrement* vers l.

La notion de limite supérieure fournit d'abord une expression du rayon de convergence d'une série entière quelconque

$$(2)\qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

Il suffit, en effet, de former la suite

$$|a_1|,\quad |\sqrt[2]{a_2}|,\quad \ldots,\quad |\sqrt[m]{a_m}$$

Soit l la limite supérieure (supposée finie) de cette suite. Le rayon cherché est donné par la formule $\rho = \frac{1}{l}$.

22. Proposons-nous maintenant d'exprimer que les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ sont des pôles au nombre de P (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

S'il en est ainsi, on pourra débarrasser la fonction de ces pôles en la multipliant par un polynome de degré P

$$\mathcal{L}_P = 1 + A^{(1)} x + \ldots + A^{(P)} x^P$$

et la nouvelle série ainsi obtenue

$$F_1 = \Sigma b_m x^m$$

sera convergente dans un cercle de rayon $\rho' > \rho$, de sorte qu'on

pourra écrire

$$(26)\qquad b_{m+P} = a_{m+P} + A^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A^{(P)} a_m = \left[\frac{\theta(1+\varepsilon)}{\rho'}\right]^m,$$

où θ est de module inférieur à 1 et ε un infiniment petit.

Réciproquement, s'il existe des nombres $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(P)}$ jouissant de la propriété précédente, la fonction donnée ne pourra posséder sur le cercle primitif d'autres points singuliers que des pôles, dont les affixes seront racines de l'équation

$$1 + A^{(1)} x + \ldots + A^{(P)} x^P = 0.$$

Elle admettra bien tous ces pôles s'il est impossible de trouver un polynome de degré moindre que P et remplissant les mêmes conditions

23. Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$

$$(28)\qquad D_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

p étant un entier quelconque. Nous désignerons par l_p la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ pour m infini (p restant fixe).

Tout d'abord, quels que soient les points singuliers de notre fonction sur son cercle de convergence, l_p ne peut dépasser $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p+1}$, d'après ce qui a été supposé sur l'ordre de grandeur de a_m.

Mais, si le polynome $\mathfrak{P}_P$ existe, nous trouverons pour l_P une valeur nécessairement moindre que la limite précédente. Car on pourra, dans la dernière colonne du déterminant (28), remplacer les a par les b de même indice, lesquels sont inférieurs à · Il viendra donc

$$l_P \leq \frac{1}{\rho^P \rho'}.$$

24. Inversement, supposons que l'inégalité

$$l_p < \frac{1}{\rho^{p+1}}$$

soit vérifiée pour $p = P$, mais non pour aucune valeur moindre de p.

En particulier, la quantité $\sqrt[m]{|D_{m, P-1}|}$ a pour limite supérieure $\rho^{\frac{1}{P}}$.

On démontre tout d'abord qu'elle tend régulièrement vers cette limite; puis on détermine les coefficients $A_m^{(1)}, \ldots, A_m^{(P)}$ par les équations

$$\begin{array}{l} a_{m+P} + A_m^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A_m^{(P)} a_m = 0, \\ a_{m+P+1} + A_m^{(1)} a_{m+P} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m+2P-1} + A_m^{(1)} a_{m+2P-2} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+P-1} = 0. \end{array}$$

Si l'on fait augmenter m indéfiniment, on constate que $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots A_m^{(P)}$ tendent respectivement vers des limites $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$, lesquelles vérifient les équations (26) en prenant pour ρ' la valeur fournie par l'équation $l_P = \frac{1}{\rho^P \rho'}$.

La fonction, considérée sur le cercle de rayon ρ, admet donc au plus P pôles, les racines de l'équation (27). Elle les admet d'ailleurs tous, sans quoi l'inégalité (29) serait vérifiée pour $p < P$.

Soient $x = x_1$, $x = x_2$, $\ldots$, $x = x_p$, $\ldots$ les différents pôles de notre fonction, rangés par ordre de module croissant (les pôles de module égal étant rangés dans un ordre arbitraire); $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ leurs modules. Les P premiers de ces modules seront tous égaux à ρ, de sorte que l'on aura, pour toutes les valeurs de p inférieures à P, l'équation

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p} = l_{p-1}. \tag{30}$$

25. Considérons maintenant les valeurs de p supérieures à P. Pour une quelconque de ces valeurs, l_p sera au plus égal à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P}}$, et cela quels que soient les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ', ainsi qu'on le voit en transformant à l'aide des équations (26) les $p - P + 1$ dernières colonnes du déterminant (28).

Mais si ces points singuliers sont des pôles au nombre de P', une nouvelle réduction se produira pour $p = P + P'$; car il existera un polynome de degré $P + P'$,

$$\mathfrak{L}'_{P+P'} = 1 + B^{(1)} x + \ldots + B^{(P+P')} x^{P+P'},$$

tel que la série $F_2 = \mathfrak{P}'F = \Sigma c_m x^m$ ait un rayon de convergence ρ'' supérieur à ρ'. Comme dans le déterminant $D_{m, P+P'}$, on peut remplacer les éléments de la dernière colonne par les c de même indice, on voit que $l_{P+P'}$ ne peut être supérieur à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{P'} \rho''}$.

Inversement, considérant la suite des valeurs de p à partir de $p = P$, on en rencontrera d'abord un certain nombre (qui peuvent d'ailleurs se réduire à une seule, $p = P$) pour lesquelles l_p est égal à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P+1}}$.

Si après cette série de valeurs en survient une, $p = P + P'$, pour laquelle l_p soit égal à $\frac{1}{\rho^P \rho'^{P'} \rho''}$, où ρ'' est supérieur à ρ', cette circonstance dénotera, comme on le démontre à l'aide de raisonnements analogues aux précédents, la présence de P' pôles sur le cercle de rayon ρ'.

Les modules $\rho_{P+1}, \ldots, \rho_{P+P'}$ sont donc égaux tous à ρ', et, par suite, on aura pour les valeurs de p comprises entre P et $P + P'$ inclusivement

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p} = \frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P}},$$

c'est-à-dire l'équation (30), d'après ce que nous savons sur les nombres $l_P, \ldots, l_{P+P'}$.

Ayant ainsi étudié les valeurs de l_p jusqu'à $p = P + P'$, on considérera les valeurs suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

On constate tout d'abord par ce procédé que le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ ne va jamais en diminuant. La condition nécessaire et suffisante pour que notre fonction soit méromorphe dans tout le plan est que ce rapport augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, les raisonnements précédents, appliqués aux valeurs de p pour lesquelles le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ présente une croissance, permettent de calculer les affixes des différents pôles. Mais nous n'avons besoin, pour ce qui va suivre, que des modules de ces pôles.

A ce point de vue nos conclusions peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

L'équation (30) *est générale.*

26. Ayant appris à calculer les pôles d'une fonction $F(x)$ donnée par un développement taylorien quelconque, nous sommes à même de résoudre le même problème pour les zéros d'une telle fonction, car ces zéros ne sont autres que les pôles de la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

Le calcul des coefficients d'une fonction à l'aide des coefficients de son inverse n'offre aucune difficulté.

Soit, comme précédemment, la fonction

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

dans laquelle seulement a_0 est supposé différent de zéro. On multipliera cette série par la série

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots,$$

et, en égalant à zéro les coefficients de la série produit, à partir du second, on déterminera C_0, C_1, ..., etc. Des valeurs ainsi trouvées on déduit aisément l'expression du déterminant $D_{m,p}$ formé, comme nous l'avons expliqué, à l'aide des coefficients de la série $f(x)$. On trouve ainsi pour ce déterminant la valeur

$$(-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}},$$

où l'on a posé

$$E_{m,p} = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & a_0 & 0 & . & \ldots & 0 \\ a_{p+2} & a_{p+1} & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m+p-1} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\ a_{m+2p} & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & a_{p+1} \end{vmatrix} \tag{31}$$

et l'équation (30) devient, en y changeant p en $p+$

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{p+1}} = l_p = \limsup_{m=\infty} \sqrt[m]{\left|\frac{E_{m,p}}{a^{m+2p+1}}\right|} = \frac{1}{|a|} \lim\sup. \sqrt[m]{|E_{m,p}|}, \tag{31}$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ désignant cette fois les modules des zéros de $F(x)$.

Telle est la formule dont nous avions besoin de rappeler la démonstration et qui va nous servir de point de départ.

27. Supposons que $F(x)$ soit une fonction entière et que le coeffi-

cient a_m soit moindre que $\frac{1}{\chi(m)} = \frac{1}{\varphi(m)^m}$, où $\varphi(m)$ est une fonction positive indéfiniment croissante de m. Nous admettrons en outre que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ est constamment croissant, hypothèse toujours légitime, d'après ce qui a été expliqué aux nos 3-5.

Nous aurons un maximum du déterminant $E_{m,p}$, défini par la formule (31), en y considérant tous les termes comme positifs et remplaçant chaque coefficient a_m par la valeur correspondante de $\frac{1}{\chi(m)}$ autrement dit en imaginant que dans le déterminant

$$(33)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\chi(p+1)} & \frac{1}{\chi(p)} & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\chi(p+2)} & \frac{1}{\chi(p+1)} & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+p-1)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} \\ \frac{1}{\chi(m+p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+2p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(p+1)} \end{vmatrix}$$

on convienne de prendre tous les termes avec le signe $+$.

Dans le déterminant (33), l'élément $a_{i,k}$ correspondant à la colonne de rang i et à la ligne de rang k est égal à zéro si $i - k > p+1$ et à $\chi(p$ … $k-$ dans le cas contraire. Le nombre des termes est

$(p+$

Je dis que le plus grand terme est celui qui correspond à la diagonale principale.

Effectivement, tout autre terme que celui-là présente au moins une *inversion*, suivant la locution usitée dans la théorie élémentaire des déterminants. Il contient donc en facteurs deux éléments $a_{i,k'}$, $a_{i',k}$ tels que $i < i'$, $k < k'$. Si à ce produit on substitue le produit $a_{i,k}$, $a_{i',k'}$ on obtient un autre terme du déterminant, et ce nouveau terme est plus grand que le précédent. Ceci résulte de ce que le rap-

$\frac{a_{i+1,k}}{} = \quad {}^{k-}_{+k}$ est croissant avec k, d'après les hypothèses faites sur la fonction χ. Il en est de même des rapports $\frac{a_{i',k}}{a_{i'-1,k}}$ et, par suite, de leur produit $\frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$. On a donc bien

$$\frac{a_{i',k'}}{a_{i,k'}} > \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}.$$

Le plus grand terme est donc celui qui ne renferme pas d'inversion, c'est-à-dire le terme principal.

Il en résulte

$$|E_{m,p}| \leqq (p+1)!\,(p+2)^{m-1}\left[\frac{1}{\chi(p+1)}\right]^{m+p-1}$$

et

$$= |a_0| \cdot \chi($$

Mais le produit $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}$ est égal à $\frac{1}{l_p}\cdot$ Le plus grand facteur de ce produit, à savoir le dernier, est donc au moins égal à $\sqrt[p+1]{\frac{1}{l_p}}$, c'est-à-dire, à un facteur près qui tend vers l'unité pour p infini, au moins égal à $\varphi(p+1)$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus si la fonction s'annulait à l'origine. Mais on ramènerait ce cas au cas général en divisant par une puissance convenable de x et en raisonnant sur la fonction ainsi débarrassée de ses racines nulles.

Nous avons également supposé que l'inégalité

$$(34) \qquad |a_m| \quad \chi(m)$$

était vérifiée, quel que soit m. Mais il suffit manifestement qu'elle ait lieu pour les grandes valeurs de l'indice; car on ramènerait les premiers coefficients à vérifier la même inégalité en divisant toute la série par un certain nombre constant, ce qui ne changerait pas les racines.

La condition que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit croissant peut également n'être vérifiée que pour les grandes valeurs de m; car on pourra

remplacer, s'il y a lieu, les valeurs de $\chi(m)$ jusqu'à un certain rang par d'autres qui satisfassent à cette condition.

Nous arrivons donc à cette conclusion :

THÉORÈME. — *Si le coefficient a_m décroît plus vite que $\frac{1}{\varphi(m)^m}$, la $p^{\text{ième}}$ racine a un module supérieur à* $(1-\varepsilon)\,\varphi(p)$, où ε est infiniment petit pour p infini.

En un mot, *les modules des racines vont en croissant plus vite que* $\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}$.

Par exemple, les racines de la fonction

$$\mathcal{F}(x) = \Sigma q^{n^2} x^n,$$

considérée au n° 6, croissent au moins aussi vite que q^n. Il en est de même pour les racines de l'équation $\mathcal{F}(x) = \mathcal{R}(x)$, où $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle quelconque.

28. Venons maintenant à notre objet principal et proposons-nous d'étudier le genre d'une fonction donnée par son développement en série entière.

Pour cela, nous appliquerons le résultat que nous venons d'obtenir aux fonctions, étudiées au n° 7, pour lesquelles on a

$$\chi(m) = (m!)^\alpha$$

et, par suite,

$$\varphi(m) = m^\alpha.$$

Comme précédemment, nous introduirons, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ.

Nous savons donc que le module ρ_p de la $p^{\text{ième}}$ racine croît, lorsque p augmente indéfiniment, plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Si λ n'est pas entier, et que $E+1$ soit l'entier immédiatement supérieur, la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ est convergente. Nous en conclurons plus loin que la fonction est du genre E.

Lorsque λ est un entier, il y a doute. C'est à cette hypothèse que

se rattache l'exemple dont parle M. Poincaré dans son Mémoire [1] et relatif à la fonction

$$\prod_{n=2}\left(1-\frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right).$$

Il faudrait, dans les cas de cette espèce, étudier directement la convergence de la série $\sum\limits_p \frac{1}{\varphi(p)^\lambda}$.

Quoi qu'il en soit, nous supposons que, le coefficient a_m étant moindre que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, nous désignerons par $E+1$ l'entier immédiatement supérieur (et non égal) à λ, de sorte que la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ soit certainement convergente. Nous pourrons former, d'après la méthode de M. Weierstrass, la fonction

$$(35)\qquad \Phi(x)=\prod\left(1-\frac{x}{x_p}\right)e^{Q_E\left(\frac{x}{x_p}\right)},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ sont les racines successives et $Q_E(z)$ est le polynome

$$\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^E}{E};$$

obtenu en prenant dans le développement de $-L(1-z)$ les E premiers termes.

M. Poincaré démontre, non seulement que a_m est plus petit que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, mais que le produit $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro. On peut même déduire de sa démonstration que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce produit tend vers zéro; car $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ se présente comme $m^{\text{ième}}$ coefficient d'une série entière.

Inversement, si la racine $m^{\text{ième}}$ de $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro, nous savons que ρ_p est égal au produit de $p^{\frac{1}{\lambda}}$ par une quantité qui augmente indéfiniment. La série $\sum \frac{1}{\rho_p^\lambda}$ est donc telle que ses termes soient avec ceux de la série harmonique dans un rapport infiniment petit pour p infini. Mais une telle série n'est pas nécessairement convergente, et le contraire se produit précisément dans l'exemple donné par M. Poincaré.

La fonction donnée $F(x)$ sera égale au produit de $\Phi(x)$ par un facteur de la forme $e^{G(x)}$. Puisque nous avons déjà démontré que les polynomes de la formule (1) sont de degré E, tout se réduit à établir que $G(x)$ est un polynome de degré au plus égal à E.

29. Or, je vais faire voir qu'*on peut décrire, avec l'origine comme centre, des cercles aussi grands qu'on le veut sur lesquels la fonction* $\Phi(x)$ *reste constamment supérieure à* $e^{-|x|^{\lambda+\varepsilon}}$.

Les rayons de ces cercles seront déterminés ainsi qu'il suit :

Les modules ρ_p, d'après nos hypothèses, croissent plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Admettons en outre que la quantité $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, ce qui peut évidemment se faire en donnant, s'il y a lieu, un petit accroissement à λ.

Puisque $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, il existera une infinité d'entiers p pour chacun desquels cette quantité prendra une valeur plus petite que toutes les valeurs suivantes. Soit p_0 un tel entier, de sorte qu'on ait, pour $h > 0$,

$$\rho_{p_0+h}^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda > h.$$

Nous déterminerons R par la relation

$$R^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda = \frac{1}{2},$$

de sorte que l'inégalité (36) pourra s'écrire

$$\rho_{p_0+h} > \left(h - \frac{1}{2} + R^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{38}$$

Pour chaque valeur de l'entier p_0, nous aurons ainsi une valeur de R; nous obtenons donc bien une suite de cercles dont les rayons vont en augmentant indéfiniment. Je dis que ces cercles satisfont à la condition indiquée.

30. Pour plus de clarté, je considérerai d'abord le cas où λ est plus petit que 1 (l'égalité étant exclue), de façon qu'on a $E = 0$. Les facteurs exponentiels disparaissant, la formule (35) se réduit à

$$\Phi(x) = \prod\left(1 - \frac{x}{x_p}\right), \tag{35'}$$

et, lorsque le point x décrira le cercle de rayon R, le module de restera supérieur à la quantité

$$(39) \qquad \prod_{p=1}^{p_0}\left(\frac{R}{\rho_p}-1\right)\prod_{p=p_0+1}^{\infty}\left(1-\frac{R}{\rho_p}\right).$$

Nous évaluerons cette expression en partageant les facteurs qui la composent en trois groupes. Le premier Π_1 comprendra tout ce qui figure sous le premier signe Π,

$$(40) \qquad \Pi_1=\prod_{p=1}^{p_0}\left(\frac{R}{\rho_p}-1\right).$$

Le nombre p_0 de ces facteurs est, nous le savons, moindre que $R^\lambda-\frac{1}{2}$. Le plus petit est le dernier, égal à

$$\frac{R}{\left(R^\lambda-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}-1=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}-1,$$

par conséquent supérieur à $\frac{1}{2R^\lambda}$ puisque λ est plus petit que 1.

Si nous envisageons les autres facteurs du produit (39), la formule (38) nous montre que l'on a

$$1-\frac{R}{\rho_{p_0+h}}>1-\frac{1}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Nous composerons le produit Π_2 avec tous les facteurs pour lesquels $h-\frac{1}{2}$ est plus petit que R^λ. Le nombre de ces facteurs est moindre que $R^\lambda+\frac{1}{2}$. Le plus petit est le premier, au moins égal à $1 \quad \frac{R}{\quad^{\frac{1}{\lambda}}}$, par conséquent supérieur à $\frac{k}{2R^\lambda}$ (k restant fini pour R infini).

Les facteurs restants, qui forment le produit Π_3, peuvent se mettre sous la forme $1-u$, où $u = \frac{1}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Or, sous cette condition, on voit aisément que $1-u$ est supérieur à e^{-2u}. Chacun des facteurs du produit Π_3 est donc plus grand que la valeur correspondante de $e^{-\frac{2}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}}$, ou, plus simplement, de $e^{-\frac{2R}{h^{\frac{1}{\lambda}}}}$.

D'après ces remarques, on voit que le produit Π_1 est supérieur à $\left(\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{R^\lambda}$, ou (comme $2R^\lambda$ croît moins vite que e^{R^ε}, si petit que soit ε) supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Une évaluation semblable s'applique au produit Π_2.

Quant au produit Π_3, il est plus grand que $e^{-R\sigma}$, où σ est le reste de la série $\sum \frac{1}{h^{\frac{1}{\lambda}}}$ arrêtée au terme qui a pour rang l'entier h_0 immédiatement supérieur à $R^\lambda + \frac{1}{2}$. Or, le reste d'une pareille série est de l'ordre de $h_0^{1-\frac{1}{\lambda}}$ ou de $R^{\lambda-1}$, de sorte que Π_0 est aussi moindre que $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$

Nous trouvons donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

31. Pour généraliser cette proposition, au cas d'un genre quelconque, nous remarquerons que, pour $u < 1$, la quantité $(1-u)\,e^{Q_E(u)}$ est supérieure à $1-u^{E+1}$. C'est ce qui résulte des deux développements

$$(42)\qquad L(1-u) + Q_E(u) = -\frac{u^{E+1}}{E+1} - \frac{u^{E+2}}{E+2} - \ldots - \frac{u^{2(E+1)}}{2(E+1)} - \ldots - \frac{u^{3(E+1)}}{3(E+1)} - \ldots,$$

$$(43)\qquad L(1-u^{E+1}) = -u^{E+1} - \frac{u^{2(E+1)}}{2} - \frac{u^{3(E+1)}}{3} - \ldots.$$

Les termes de la série (42) sont constamment décroissants en valeur absolue. Le premier terme de la série (43) sera donc (en valeur

absolue) supérieur à l'ensemble des $E + 1$ premiers termes de la série (42); le deuxième terme de (43) à la somme des $E + 1$ suivants, etc.

D'après cela, au lieu des facteurs $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ qui composaient tout à l'heure les produits Π_2 et Π_3, nous aurons à considérer des facteurs de la forme $\dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h - \frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{E+1}{\lambda}}}$.

Pour les valeurs de h inférieures à $R^\lambda + \frac{1}{2}$, nous remplacerons $\frac{E+1}{\lambda}$ par l'unité, et nous trouverons pour le produit Π_2 de ces facteurs la même évaluation que précédemment.

Quant aux facteurs suivants, nous constaterons comme plus haut que leur produit est supérieur à $e^{-R^{E+1}\sigma'}$, où σ' est le reste de la série $\dfrac{1}{h^{\frac{E+1}{\lambda}}}$, arrêtée au terme de rang h_0.

Ce reste étant comparable à $\dfrac{1}{h_0^{\frac{E+1}{\lambda} - 1}}$, le produit Π_3 est encore supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Au produit Π_1 correspondra un produit de facteurs polynomes et de facteurs exponentiels. Les premiers sont en nombre au plus égal à $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est supérieur à $\dfrac{1}{\quad^{1}} - 1$, quantité de la forme $\frac{k}{R^\lambda}$, où k est fini. Leur produit satisfait donc encore aux conclusions précédentes.

Les facteurs exponentiels sont respectivement plus grands que les quantités $e^{-\left(\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^E}{E}\right)}$, où $u = \frac{R}{\rho_p}$ est plus grand que 1. Nous diminuerons encore une telle quantité en supprimant les dénominateurs du polynome Q_E. Le plus grand terme de ce polynome devient alors le dernier et nous pourrons remplacer tous les autres par

celui-là. Nous trouvons donc un produit plus grand que l'expression

$$(44) \qquad e^{-\mathrm{ER^E}\sum_{p=1}^{p_0}\frac{1}{\rho_p^{\mathrm{E}}}},$$

ρ_p étant de l'ordre de $p^{\frac{1}{\lambda}}$, la série $\frac{1}{\rho_p^{\mathrm{E}}}$ est divergente; mais sa somme, lorsqu'on la limite au terme de rang p_0, n'augmente pas plus vite que $p^{1-\frac{\mathrm{E}}{\lambda}}$.

En prenant $p_0 = \mathrm{R}^\lambda$ et substituant dans l'expression (44), on arrive pour cette dernière au même résultat que pour les précédentes.

32. Notre proposition auxiliaire est donc démontrée. Sur chacun des cercles de rayon R, l'inégalité

$$|\Phi(x)| > e^{-\mathrm{R}^{\lambda+\varepsilon}}$$

est vérifiée.

Comme on a, d'autre part, ainsi qu'il a été vu au n° 7,

$$|\mathrm{F}(x)| < e^{\mathrm{HR}^\lambda},$$

il vient

$$\left|\frac{\mathrm{F}}{\Phi}\right| = |e^{\mathrm{G}(x)}| < e^{\mathrm{R}^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction $e^{\mathrm{G}(x)}$ les considérations développées aux n^os 12-13, et nous en concluons que G (x) est un polynome de degré E au plus, de sorte que notre fonction F est bien du genre E.

33. Ainsi, nous avons établi que, *lorsque le coefficient a_m est de l'ordre de $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, où λ n'est pas entier, la fonction $\Sigma a_m x^m$ est du genre* E, *en désignant par* E + 1 *l'entier immédiatement supérieur à λ*. La réciproque du théorème de M. Poincaré est donc bien établie pour λ non entier.

Si λ est un entier E + 1, il y a doute. Notre fonction peut être du genre E ou du genre E + 1.

A cause de ce cas douteux, les recherches précédentes ne permettent

pas encore de résoudre complètement la question posée par M. Poincaré dans son Mémoire, et de décider si le genre se conserve dans la différentiation ou dans une combinaison linéaire. Nous pouvons seulement affirmer que la dérivée d'une fonction de genre E ou la somme de deux pareilles fonctions est *en général* de genre E et *au plus* de genre E + 1.

Le cas où les résultats précédents affectent la forme la plus simple est celui où, λ étant plus petit que 1, le genre est égal à zéro.

C'est ce qui arrivera, par exemple, pour $\frac{\sin x}{x}$ si l'on considère cette quantité comme fonction de x^2. Nous complétons ainsi, comme on le voit, la démonstration de la formule

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

On sait en effet que, dans les cours de Calcul intégral (1), on n'arrive pas à déduire immédiatement cette formule du théorème de M. Weierstrass. Une démonstration spéciale est nécessaire pour établir que le facteur exponentiel disparaît.

Ici, cette circonstance apparaît tout d'abord, en supposant seulement connu le développement taylorien de $\sin x$, ou, plus simplement encore, en partant de sa relation avec la fonction exponentielle.

La fonction $\mathcal{F}(x)$ du n° 6 est également du genre zéro, ainsi que ses combinaisons linéaires avec d'autres fonctions analogues ou des polynomes, etc.

TROISIÈME PARTIE.

Application a la fonction de Riemann.

34. Dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (2), Riemann utilise les propriétés de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \sum$$

(1) *Voir*, par exemple, Picard, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 151.
(2) Riemann, *Œuvres complètes* (Éd. Weber et Dedekind), p. 136 et suiv.

dont l'étude est elle-même ramenée à celle d'une fonction entière $\xi(x)$ donnée par la formule

$$(45) \qquad \xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2} \log t\right) dt,$$

où

$$(46) \qquad \Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}.$$

L'analyse de Riemann repose sur ce fait que $\xi(x)$, considéré comme fonction de x^2, est de genre zéro, fait qui est énoncé dans son Mémoire, mais sans démonstration suffisante.

Les recherches précédentes vont nous permettre de déterminer en toute rigueur le genre de $\xi(x)$.

35. Nous aurons tout d'abord à développer ξ en série. L'intégrale qui figure au second membre de la formule (45) est de la forme $\Sigma(-1)^m C_{2m} x^{2m}$, où l'on a

$$(47) \qquad C_m = \frac{1}{2^m m!} \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} (\log t)^m\, dt.$$

On aura donc, en considérant ξ comme fonction de x^2,

$$\xi(x) = \sum_0^\infty a_m x^{2m},$$

où les coefficients a sont donnés, à l'exception du premier, par la formule

$$(49) \qquad a_m = (-1)^m \left(\frac{C_{2m}}{4} - C_{2m-2}\right).$$

36. Remarquons tout d'abord que la série $\Psi(t)$ peut être remplacée, à un facteur fini (¹) près, par son premier terme $e^{-\pi t}$. On peut également faire abstraction du facteur $t^{-\frac{3}{4}}$ qui est plus petit que 1.

(¹) Ce facteur est même très voisin de 1. Il est inférieur à

$e^{-3\pi}$ 1

D'ailleurs, si ξ est un nombre positif, mais aussi petit qu'on le voudra, l'inégalité

$$[illegible]$$

ou

(50) $$\log t < e^{\frac{\varepsilon t}{m}}$$

est vérifiée à partir de la valeur $t = m^{1+\varepsilon}$, du moins pour les grandes valeurs de m; car on a bien, pour m suffisamment grand,

$$(1 + \varepsilon) \log m < e^{\varepsilon m^{\varepsilon}}$$

et de plus, en prenant les dérivées des deux membres de l'inégalité (50), on trouve

$$\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{m} e^{\frac{\varepsilon t}{m}},$$

inégalité dont le premier membre est décroissant tandis que le second est croissant et qui est vérifiée pour $t = m^{1+\varepsilon}$, si m est suffisamment grand.

Si donc, dans la formule (47), nous décomposons l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{2^m m!}$ en deux, l'une prise entre les limites 1 et $m^{1+\varepsilon}$, l'autre entre $m^{1+\varepsilon}$ et $+\infty$, la seconde sera moindre que $\frac{e^{-(\pi-\varepsilon) m^{1+\varepsilon}}}{\pi - \varepsilon}$, c'est-à-dire infiniment petite pour m infini.

La première sera manifestement inférieure à

$$C_0 (1 + \varepsilon)^m (\log m)^m,$$

où C_0 est l'intégrale $\int_1^{\infty} e^{-\pi t} t^{-\frac{3}{4}} dt$.

C_m sera donc au plus de l'ordre de $\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^m \frac{(\log m)^m}{m!}$, ce qui donne

$$|a_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2m} \frac{(\log 2m)^{2m}}{(2m)!}.$$

Il faut donc prendre [1]

$$\varphi(m) = [illegible]$$

(1) La fonction $\varphi(m)$ ainsi définie satisfait manifestement aux conditions indiquées au nº 27.

D'après ce qui précède, cette formule exprime également la loi de croissance des racines de l'équation $\xi(x) = 0$, considérée comme équation en x^2.

Si l'on considère x comme l'inconnue de l'équation, il faut prendre la racine carrée de l'expression précédente et l'on trouve

$$\rho_p > \frac{kp}{\log p} \tag{51}$$

en posant

$$k = \frac{4 - \varepsilon}{e}. \tag{52}$$

37. Si nous voulions avoir une limite supérieure des modules des racines successives, il faudrait commencer par trouver une limite inférieure du module de a_m. Or, on aura une limite inférieure de C_m en prenant l'intégrale entre les limites $m^{1-\varepsilon}$ et $m^{1-\varepsilon'}$ (où ε et $\varepsilon' < \varepsilon$ sont deux nombres positifs très petits). On trouve ainsi

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m e^{-\pi m^{1-\varepsilon'}} m^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon')}}{2^m m!} (m^{1-\varepsilon'} - m^{1-\varepsilon}),$$

ce qui peut s'écrire

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m}{2^m m!},$$

en réunissant tous les facteurs de la forme $(1-\varepsilon)^m$.

D'ailleurs, le rapport $\frac{C_m}{C_{m-2}}$ tend vers zéro; car dans l'évaluation de ce rapport on peut, d'après ce que nous avons vu, considérer l'intégrale prise seulement jusqu'à la limite $t = m^{1+\varepsilon}$, et il vient alors

$$C_m < C_{m-2} \frac{(1+\varepsilon)^2 \log^2 m}{4m(m-1)}.$$

Il en résulte que $|a_m|$ est, à un facteur constant près, supérieur à C_{2m-2} ou à $\frac{(1-\varepsilon)^{2m} (\log m)^{2m}}{2^{2m} (2m)!}$.

Nous pourrons alors appliquer les raisonnements des n$^{\text{os}}$ 19 et 20 en prenant $\varphi(p) = \left(\frac{k'p}{\log p}\right)^2$, où k' est une constante indéterminée.

On a ici $\alpha = 2 - \varepsilon$, et l'on trouve

$$|a_m| < e^{(2 - e + \varepsilon)\log m}$$

En appliquant la réduction indiquée dans la note du n° 19, on obtient une limite un peu moins élevée

$$|a_m| < \left[\frac{(1,88 + \varepsilon)e \log m}{k'm}\right]^{2m}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle qui vient d'être trouvée pour a_m, il vient

Telle est la quantité que $\frac{\rho_p \log p}{p}$ ne saurait dépasser constamment, lorsque p grandit indéfiniment.

Les conclusions auxquelles nous arrivons sont donc les suivantes :

Le rapport $\frac{1}{\rho_p}\frac{p}{\log p}$ *reste fini et sa limite supérieure, pour* p *infini, est comprise entre* $\frac{1}{7,56}$ et $\frac{e}{7}$.

Riemann donne, entre un module ρ et le nombre p des racines de module plus petit que ρ, la relation approchée

$$p = \frac{\rho}{2\pi}\left(\log\frac{\rho}{2\pi} - 1\right). \tag{53}$$

Pour comparer ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, il faut résoudre cette équation par rapport à ρ, ce qui se fait aisément par la méthode des approximations successives. On trouve ainsi comme valeur approchée

de sorte que le rapport $\frac{1}{\rho}\frac{p}{\log p}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2\pi}$. Cette valeur est comprise entre les deux limites précédemment indiquées, de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ de la formule (53) est exact ou non.

38. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ce point n'est pas celui sur lequel repose le raisonnement de Riemann. C'est la détermination du genre de $\xi(x)$ qui constitue la question essentielle et les recherches qui précèdent en donnent immédiatement la solution.

Nous avons, en effet, constaté que, en considérant toujours $\xi(x)$ comme fonction de x^2, son développement satisfait à la condition (8) avec $\alpha = 2 - \varepsilon$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Dès lors, les conclusions du n° 33 nous permettent d'affirmer la proposition suivante :

La fonction $\xi(x)$ (considérée comme fonction de x^2) est de genre zéro.

Elle s'exprime par le produit de facteurs primaires et d'une simple constante, sans aucun facteur exponentiel.

C'est le résultat que nous nous proposions d'établir.

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 24, 1896.)

Dans un précédent Mémoire ([1]), j'ai étudié les relations qui existent entre l'ordre de grandeur des coefficients du développement d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de la fonction pour des valeurs infinies de la variable. J'ai reconnu depuis que ces relations pouvaient se mettre sous une forme plus simple et en même temps plus exacte. Je vais exposer sommairement les résultats auxquels j'ai été conduit à cet égard.

Soit la fonction entière [illegible].

$$(1) \qquad [illegible] = a_0 + [illegible] \; a_m x [illegible]$$

Comme dans le Mémoire cité, je porterai les valeurs de m en abscisses et les valeurs de $\mu = \mathrm{L}\,\frac{[illegible]}{a_m}$ en ordonnées. Les coefficients de la série seront ainsi représentés par une série de points auxquels je circonscrirai le polygone de Newton P, ainsi qu'il a été expliqué *loco citato*.

D'autre part, je désignerai par η le logarithme du module maximum de la fonction sur le cercle de rayon e^{ξ} (où ξ est un nombre réel quelconque). Le lieu du point (ξ, η) est une courbe C qui tourne toujours sa concavité vers les η positifs; elle aura en général (mais non en tous ses points) une tangente, ce dont d'ailleurs nous n'aurons pas à nous servir ([2]).

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1893.

([2]) Dans la Notice sur les *Travaux scientifiques de M. Hadamard*, II, 1912, on lit

Soit (ξ, η) un point de cette courbe C. Les expressions des coefficients a_m sous forme d'intégrales définies nous montrent que l'on a

$$| a_m$$

ou bien

$$\cdot \, o.$$

Le premier membre égalé à o représente, en supposant le plan du point (m, μ) et le plan du point (ξ, η) superposés, la polaire du point (ξ, η) par rapport à la parabole $m^2 - 2\mu = 0$. *Cette polaire doit donc laisser le point (m, μ) en dessus.*

Nous arrivons, par conséquent, à la première conclusion suivante :

Prenons le contour réciproque du contour P *par rapport à la parabole*

$$m^2 - 2\mu = 0; \tag{3}$$

la courbe C *est tout entière au-dessus du contour* C_1.

Soit, d'autre part $(\mu = m, \alpha - \beta)$ un côté du polygone P. Le point (α, β) est un sommet de C_1. Les coefficients a_m seront tous inférieurs en valeur absolue aux valeurs correspondantes de $e^{\beta - m\alpha}$. Remplaçant dans l'équation (1), on obtient, pour $\xi < \alpha$, l'inégalité

(4)

Considérons la courbe $e^{\xi} + e^{-\eta} = 1$. C'est une courbe tout entière comprise dans l'angle des ξ négatifs et des η positifs, et qui admet ces axes pour asymptotes. Transportons l'origine de ces

ceci au bas des pages 49 et 50. Cette proposition a reçu récemment plusieurs démonstrations (travaux de MM. Faber, Blumenthal). Je crois devoir indiquer celle que j'avais obtenue à la date indiquée et qui me paraît la plus simple : p et n étant deux entiers positifs quelconques, la fonction $[f(x)]^n/x^p$ est holomorphe dans une couronne circulaire quelconque de centre O : elle ne peut donc atteindre son module maximum que sur une des circonférences limites. En désignant par p/n le coefficient angulaire d'une corde quelconque de C ou, en cas d'irrationnalité, un nombre fractionnaire tendant vers ce coefficient angulaire, on voit aisément que ceci revient à dire que, de trois points quelconques de C, l'intermédiaire est toujours au-dessous de la droite qui joint les deux autres : ce qui est la proposition à démontrer (Note du Comité de Rédaction).

axes successivement aux différents sommets du polygone C_1 (sans changer leur direction). Nous aurons ainsi une série de courbes que nous rejoindrons par des tangentes communes, de manière à former un contour mixtiligne C_2 dont les côtés courbes se raccordent aux côtés droits qui les comprennent. *La courbe* C *est tout entière en dessous de ce second contour* C_2.

Nous avons donc ainsi constamment deux contours, dont l'un limite la fonction inférieurement, l'autre supérieurement. D'ailleurs, ces deux contours vont en se resserrant indéfiniment et, par conséquent, *le contour* C_1, par exemple, *représente asymptotiquement la courbe* C (en définissant convenablement, bien entendu, ce qu'on doit entendre par cette locution).

THÉORÈME

LES SÉRIES ENTIÈRES

(*Acta mathematica*, 1897-1899, t. 22.)

1. Soient deux séries de Maclaurin

$$(z) = a_0 + a_1$$

convergentes dans des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons respectifs k et l.

La série

$$(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots, \tag{3}$$

dont chaque coefficient est égal au produit des coefficients correspondants des séries (1) et (2), a son rayon de convergence au moins égal à kl. Nous allons démontrer, plus généralement, que *la fonction $\psi(x)$ n'a* (et cela *dans tout le plan*) *d'autres points singuliers que ceux que l'on obtient en multipliant les affixes des différents points singuliers de $f(z)$ par celles des différents points singuliers de $\varphi(t)$.*

2. Une expression analytique bien connue de $\psi(x)$ est la suivante :

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})\, \varphi(te^{-i\theta})\, d\theta, \tag{4}$$

z et t étant deux nombres fixes quelconques de modules respectivement inférieurs à k et l et satisfaisant à la relation

$$zt = x. \tag{5}$$

A l'intégrale (4), nous allons en substituer une autre donnant aussi la valeur de $\psi(x)$ et comprenant la première comme cas particulier.

Pour cela, x ayant une valeur déterminée quelconque, nous ferons encore correspondre à chaque valeur de z une valeur de t par l'équation (5); mais, au lieu de laisser z fixe, nous supposerons qu'il tourne autour de l'origine en décrivant un certain contour C; alors, le point correspondant t tournera également autour de l'origine, mais en sens inverse, en décrivant le contour Γ qui correspond à C; on aura d'ailleurs évidemment

$$dz \qquad \frac{dt}{t} \tag{6}$$

De plus, à une valeur de z extérieure à C, correspond une valeur de t intérieure à Γ, et inversement.

Nous supposerons :

1° Que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour C et sur ce contour;

2° Que la fonction $\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du contour Γ et sur ce contour.

3. Cela posé, formons l'intégrale

prise le long du contour C, dans le sens direct, laquelle équivaut, en vertu de la relation (6), à l'intégrale

$$dt$$

prise (dans le sens direct) le long de Γ, puisque le sens direct sur l'un des contours correspond au sens rétrograde sur l'autre.

L'intégrale I *ne dépend pas du choix du contour* C, tant que celui-ci vérifie les deux conditions spécifiées tout à l'heure : autrement dit,

si l'on remplace le contour C par un contour C′ satisfaisant aux mêmes conditions, l'intégrale n'est pas changée. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction $\frac{1}{z}f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ est holomorphe entre C et C′.

D'ailleurs, I *est, pour un choix déterminé du contour* C, *une fonction holomorphe de* x.

Donc I est une fonction holomorphe de x tant que cette quantité et les contours C, Γ varient de manière que les conditions du numéro précédent ne cessent pas d'être vérifiées.

Si enfin le module de x est inférieur à kl, on peut supposer les contours C, Γ respectivement intérieurs aux cercles de convergence des séries (1), (2) et, par conséquent, utiliser les développements de f et de φ : il vient alors immédiatement

$$I = 2i\pi\psi(x).$$

En un mot, *l'intégrale* $\frac{I}{2i\pi}$ *fournit la continuation analytique de la série* (3).

4. Il reste à examiner pour quelles valeurs de x nous pourrons construire les contours C, Γ possédant les propriétés demandées.

Soient S, Σ deux aires comprenant l'origine, que nous supposerons, pour fixer les idées, simplement connexes et dans lesquelles les fonctions f, φ sont respectivement holomorphes. Donnons-nous encore, pour un instant, la valeur de x : le lieu des points z, tels que les points t correspondants soient situés sur le contour de Σ, est une certaine courbe fermée c_x et un point t sera à l'intérieur ou à l'extérieur de Σ, suivant qu'il correspond à un point z extérieur ou intérieur à c_x.

Toutes les courbes c_x correspondant aux diverses valeurs de x seront d'ailleurs semblables entre elles.

Nous appellerons *produit* des aires S et Σ, et nous désignerons par la notation SΣ, l'aire lieu des points x tels que la courbe c_x soit comprise tout entière à l'intérieur de S : aire qui est limitée par la courbe lieu des points x tels, que c_x touche intérieurement le contour de S.

5. Ce produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs; car la définition précédente peut évidemment se remplacer par celle-ci :

L'aire SΣ est formée par les points dont les affixes ne peuvent pas être obtenues en multipliant l'affixe d'un point extérieur à S par celle d'un point extérieur à Σ.

6. A quelle condition cette aire SΣ sera-t-elle connexe? Considérons toutes les courbes c_x qui passent par un point déterminé α, et supposons qu'il existe un arc $\alpha\alpha_1$ intérieur à toutes ces courbes (ou pouvant avoir des points communs avec quelques-unes d'entre elles) et partant du point α pour aboutir à un point α_1 plus rapproché de l'origine que le premier. Alors, si l'on pose $x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha} x$, on voit que la courbe c_{x_1} sera intérieure à c_x, quel que soit x; et même on pourra aller de x à x_1, par un arc (à savoir l'arc semblable à $\alpha\alpha_1$) tel que, pour tout point y de cet arc, la courbe c_y soit intérieure à c_x.

Si donc le point x est intérieur à l'aire SΣ, il en est de même de tous les points de l'arc xx_1, et aussi de l'arc x_1x_2 joignant le point x_1 au point d'affixe $x_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha} x_1$; et ainsi de suite. En un mot, on peut, sans sortir de l'aire SΣ, passer de tout point x intérieur à cette aire à des points infiniment voisins de l'origine.

Donc l'aire SΣ est connexe.

Il est clair, d'ailleurs, qu'on obtiendra une autre condition également suffisante, mais non nécessaire, en substituant, dans ce que nous venons de dire, l'aire S à l'aire Σ et inversement.

7. L'aire SΣ est celle dans laquelle nous pourrons faire varier x sans que la définition et les propriétés fondamentales de l'intégrale I cessent de subsister.

Si, en effet, x est intérieur à cette aire SΣ, on pourra prendre pour le contour C l'un quelconque de ceux qui contiennent c_x à leur intérieur, tout en étant eux-mêmes intérieurs à S.

Au contraire, si x est extérieur à l'aire SΣ, le contour de Σ correspond à une courbe c_x qui sort de l'aire S et il en sera, *a fortiori*, de même de tout contour Γ intérieur à Σ.

8. Soient décrits, avec l'origine comme centre, un cercle de rayon $K > k$ dans le plan de la variable z, un cercle de rayon $L > l$

dans le plan de la variable t. Supposons que, dans ces cercles, les fonctions $f(z)$, $\varphi(t)$ aient chacune un certain nombre de points singuliers que nous supposerons isolés, pour simplifier : soient

$$a_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

les points singuliers de $f(z)$,

$$b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

ceux de $\varphi(t)$. Nous joindrons les premiers à la circonférence de rayon K, les seconds à la circonférence de rayon L, par des rayons ou, plus généralement, par des spirales logarithmiques toutes semblables entre elles et ayant l'origine comme pôle.

Nous pourrons prendre, pour les aires S et Σ, celles qu'on obtient en pratiquant, suivant ces spirales, des sections dans les deux cercles précédents. L'aire $S\Sigma$ sera alors celle qu'on déduira d'un cercle C ayant pour rayon la plus petite des quantités kL et lK, en y pratiquant des sections suivant des spirales logarithmiques semblables aux précédentes et partant des points

$$c_{\mu,\nu} = a_\mu b_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, p).$$

Donc la fonction ψ est holomorphe à l'intérieur de l'aire ainsi définie; comme, d'ailleurs, la forme des spirales logarithmiques employées est arbitraire, *les seuls points singuliers de $\psi(x)$, à l'intérieur du cercle* C, *sont les points $c_{\mu\nu}$*. C'est le résultat même que nous avions en vue.

9. Ce résultat peut être considéré comme généralisant, à un certain point de vue, celui qui figure dans ma thèse [1] et qui se rapporte aux points singuliers de la série

$$(8) \qquad \Sigma C_m a_m x^m,$$

où

$$C_m = \int_0^1 \chi(t) t^m \, dt.$$

Il présente, comme ce dernier, cette particularité d'être valable

[1] *Journal de M. Jordan*, 4^e^ série, t. 8, n^os^ 35-37, 1892.

dans toute l'étendue du plan, tant en dehors qu'à l'intérieur du cercle de convergence : en un mot, de fournir une propriété du prolongement analytique d'une fonction donnée par son développement en série de puissances.

On doit toutefois observer qu'il lui manque, pour servir à la connaissance de ce prolongement analytique, un autre caractère important : ce caractère est l'invariance vis-à-vis de la transformation par laquelle on passe du développement de $f(x)$ à celui de $f(x+h)$ (h étant une constante quelconque).

Les difficultés que l'on rencontre dans l'étude des fonctions d'après leur développement taylorien tiennent, en effet, à la complication des formules qui lient entre eux les coefficients de ces deux développements (supposés ordonnés suivant les puissances de x); et l'un des problèmes dont la solution serait la plus essentielle pour cette étude est la recherche de fonctions des coefficients invariantes, non seulement vis-à-vis de la transformation que ces formules définissent (ce qui ne présenterait aucune difficulté, au moins pour les petites valeurs de h, et serait, d'autre part, sans utilité), mais encore par cette transformation, combinée avec l'addition d'un polynome quelconque à $f(x)$.

Malheureusement nous ne connaissons guère, dans cet ordre d'idées, qu'un seul exemple d'invariance ou plutôt de covariance : c'est celui des dérivées de $f(x)$ et, plus généralement, ainsi que je l'ai remarqué ([1]), du symbole

$$\int^{x} (x - z)^{u} f(z)\,dz.$$

Quoi qu'il en soit, on serait très probablement conduit à des applications intéressantes par l'examen des cas où la série $\psi(x)$ aurait un rayon de convergence supérieur au produit des rayons de convergence primitifs k et l : ce qui pourra se produire lorsque la quantité $\left|\sqrt[m]{a_m}\right|$ ne tendra pas régulièrement vers $\frac{1}{k}$.

10. En terminant, signalons quelques formules analogues à la formule (4) et relatives aux séries de la forme $a_m e^{-\lambda_m u}$.

([1]) *Loc. cit.*, n° 31, note.

Soient

$$F(u) = \sum_m a_m e^{-\lambda_m u}, \tag{9}$$

$$\Phi(v) = \sum_m b_m e^{-\lambda_m v}$$

deux telles séries, absolument convergentes pour certaines valeurs de $R(u)$ [1] et ed $R(v)$. Considérons la quantité

$$\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} F(u + wi)\,\Phi(v - wi)\,dw. \tag{11}$$

Comme on a

$$F(u + \qquad - wi) = \sum a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u + \lambda_{m'} v)}\left[\cos(\lambda_m - \lambda_{m'})w + i\sin(\lambda_m - \lambda_{m'})w\right],$$

le développement de l'expression (11) comprendra deux parties : l'une (celle qui correspond à $m = m'$) sera égale à $\Psi(u + v)$, où l'on a posé

$$\Psi(u) = \sum_m a_m b_m e^{-\lambda_m u};$$

Quant aux termes restants, qui sont de la forme

$$a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u + \lambda_{m'} v)} \frac{\sin(\lambda_m - \lambda_{m'})A}{(\lambda_m - \lambda_{m'})A} \qquad (m \neq m'), \tag{13}$$

ils constituent un ensemble qui tend vers zéro pour A infini; car chacun d'eux tend vers zéro et, d'autre part, la série qu'ils forment est uniformément convergente quel que soit A, puisque ses termes sont plus petits en valeur absolue que ceux de la série

$$\sum_{m,\,m'} a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u + \lambda_{m'} v)},$$

laquelle est absolument convergente, d'après les hypothèses faites sur F et Φ.

[1] $R(u)$ désigne la partie réelle de u.

Si donc nous appelons *valeur moyenne* de $f(w)$ l'expression

$$\lim_{\Lambda=\infty} \frac{1}{2\Lambda} \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} f(w)\, dw,$$

il viendra

$$\text{Val. moy.}\,[F(u+wi)\,\Phi(v-wi)] = \Psi(u+v).$$

On aura ainsi

$$\text{Val. moy.}\,[\zeta(u+wi)\,\zeta(v-wi)] = \zeta(u+v),$$

ζ étant la fonction de Riemann; et, plus généralement, le symbole D représentant une différentiation,

$$\text{Val. moy.}\,[D^p\zeta(u+wi)\,D^q\zeta(v-wi)] = D^{p+q}\zeta(u+v).$$

Les fonctions

$$\zeta(u)(1-2^{1-u}) = \Sigma(-1)^m m^{-u} \qquad \text{et} \qquad \frac{\zeta(2u)}{\zeta(u)} = \prod \frac{1}{1+\dfrac{1}{p^u}}$$

ont des développements identiques à celui de ζ, aux signes des termes près. On aura donc

$$\begin{aligned}&\text{Val. moy.}\,[\zeta(u+wi)(1-2^{1-u-wi})\,\zeta(v-wi)(1-2^{1-v+wi})]\\ &\quad = \text{Val. moy.}\left\{\frac{\zeta[2(u+wi)]\,\zeta[2(v-wi)]}{\zeta(u+wi)\,\zeta(v-wi)}\right\} = \zeta(u+v)\end{aligned}$$

et autres formules analogues.

En particulier, pour u réel, il vient

$$\text{Val. moy.}\,|\zeta(u+wi)|^2 = \zeta(2u),$$

$$\text{Val. moy.}\,|D^p\zeta(u+wi)|^2 = D^{2p}\zeta(2u),$$

$$\text{Val. moy.}\,|\zeta(u+wi)(1-2^{1-u-wi})|^2 = \zeta(2u),$$

$$\text{Val. moy.}\left|\frac{\zeta[2(u+wi)]}{\zeta(u+wi)}\right|^2 = \zeta(2u).$$

Il est intéressant de remarquer que le second membre de cette dernière formule reste fini, pour u compris entre $\frac{1}{2}$ et 1; et l'on peut se demander si la formule ne subsisterait pas pour ces valeurs de u;

ce qui exigerait, bien entendu, la réalité de racines dans l'équation [1]

Cenon, 18 août 1897.

[1] Il est probable qu'il ne faudrait pas chercher à démontrer la réalité des racines de l'équation (15) par des considérations de cette espèce, non plus que par toute autre voie reposant sur la décomposition de $\zeta(u)$ en produit. Cette décomposition ne permet, en effet, d'utiliser que les propriétés suivantes de la fonction ζ:

1° $\zeta(u)$ [pour $R(u) > 1$] est le produit de facteurs de la forme $\frac{1}{1 - p^{-u}}$, où les nombres p sont positifs et croissent indéfiniment;

2° $\zeta(u)$ est uniforme dans tout le plan et égal au quotient, par $\frac{u(u-1)}{2}\pi^{-\frac{u}{2}}\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)$ d'une fonction entière de genre zéro par rapport à $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2$.

Or, rien ne porte à croire qu'il n'existe pas une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions précédentes, sans avoir leurs zéros situés sur la droite $R(u) = \frac{1}{2}$.

Bien entendu, il se peut que les racines de l'équation (15) soient réelles sans que la formule (14) soit vraie et sans même que son premier membre ait un sens.

SUR

LA GÉNÉRALISATION

DE LA

NOTION DE FONCTION ANALYTIQUE

[*Bulletin de la Société mathématique*, 1912 (Comptes rendus des séances, p. 28-29).]

Indépendamment des extensions qu'on peut apporter à cette notion dans les voies indiquées par M. Borel, il en est d'autres auxquelles on est conduit par les analogies que suggère l'étude des équations aux dérivées partielles.

Si, en effet, on considère d'abord l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

et si l'on se pose, pour cette équation, le *problème de Cauchy*, c'est-à-dire si l'on cherche à déterminer une solution de l'équation par les conditions

$$V = f(y), \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = g(y) \qquad (\text{pour } x = 0),$$

on constate que le problème n'est pas toujours possible et que, si l'on donne la fonction $f(y)$, la seconde fonction $g(y)$ est déterminée à *une fonction analytique près*.

Or, M. Holmgren s'est posé un problème tout semblable pour l'équation de la chaleur. Se donnant la fonction f, il constate encore

que la fonction g est de la forme

où le terme g_1 est déterminé du moment qu'on se donne f, tandis que g_2 reste arbitraire dans une certaine mesure.

Les conditions auxquelles on doit satisfaire sont :

1° Que toutes les dérivées $g_2^{(n)}(y)$ de g_2 existent;

2° Que leurs valeurs absolues soient inférieures à une certaine fonction de l'ordre n de dérivation.

Mais la limitation ainsi apportée à la grandeur de $|g_2^{(n)}(y)|$ est *moins restrictive* que celle qu'entraînerait l'analyticité. On peut dès lors se demander si elle partage avec elle la propriété de déterminer le prolongement d'une fonction, c'est-à-dire si une fonction dont on sait qu'elle doit satisfaire aux conditions de M. Holmgren et qui est donnée dans un certain intervalle est, par cela même, connue dans un intervalle adjacent au premier.

La réponse est négative : on peut, sans troubler les conditions en question, prolonger une fonction de toutes sortes de manières.

Il y aurait lieu, on le voit, de rechercher quelles conditions de grandeur, imposées aux dérivées successives d'une fonction de variable réelle, entraîneraient la détermination du prolongement de cette fonction et si même les conditions requises pour l'analyticité ne seraient pas nécessaires pour qu'il en soit ainsi (1).

D'autres types d'équations aux dérivées partielles seraient, d'autre part, intéressants à examiner au même point de vue.

---

(1) Note du Comité de Rédaction : Cette question a donné lieu à d'importants travaux de MM. Denjoy, Borel et Carleman.

THÉORIE DES NOMBRES

SUR LA DISTRIBUTION

DES

ZÉROS DE LA FONCTION

ET

SES CONSÉQUENCES ARITHMÉTIQUES [1]

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 24, 1896.)

I. — Sur les zéros de la fonction ζ et de quelques fonctions analogues.

1. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, par l'équation

$$(1) \qquad \log\zeta(s) = \sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

où p désigne successivement les différents nombres premiers; les logarithmes sont népériens. Elle est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $s = 1$, qui est un pôle simple. Elle ne s'annule pour aucune valeur de s dont la partie réelle soit supérieure à 1, puisque

[1] Les résultats fondamentaux du présent Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences, dans la séance du 22 juin 1896.

le second membre de l'équation (1) est fini. Mais elle admet une infinité de zéros imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Stieltjes avait démontré, conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme $\frac{1}{2} + ti$ (le nombre t étant réel); mais sa démonstration n'a jamais été publiée, et il n'a même pas été établi que la fonction ζ n'ait pas de zéros sur la droite (¹) $\mathcal{R}(s) = 1$.

C'est cette dernière conclusion que je me propose de démontrer.

2. Faisons d'abord tendre s vers 1 par valeurs réelles et décroissantes. Le logarithme de $\zeta(s)$ ou, à une quantité finie près, la série

$$\text{(2)} \qquad S = \sum_p \frac{1}{p^s}$$

augmente indéfiniment comme $-\log(s-1)$.

Remplaçons maintenant s par $s + ti$ et imaginons que le point d'affixe $1 + ti$ soit un zéro de ζ. Alors la partie réelle de $\log \zeta(s + ti)$, c'est-à-dire (à une quantité finie près) la somme

$$\text{(3)} \qquad P = \sum_p \frac{1}{p^s} \cos(t \log p),$$

devra croître indéfiniment par valeurs négatives *comme* $\log(s-1)$, *c'est-à-dire comme* $-S$, lorsque s tendra vers 1 (t restant fixe).

3. Cela posé, soit α un angle que nous supposerons petit; parmi les différents nombres premiers, distinguons deux catégories :

1° Ceux qui satisfont, pour quelque valeur entière de k, à la double inégalité

$$\frac{(2k+1)\pi - \alpha}{t} \leqq \log p \leqq \frac{(2k+1)\pi + \alpha}{t}.$$

Les parties des sommes S_n et P_n [c'est-à-dire des séries (2) et (3) bornées à leurs n premiers termes] correspondant à cette première catégorie de nombres premiers seront désignées par S'_n et P'_n.

(¹) $\mathcal{R}(s)$ désigne, comme d'habitude, la partie réelle de s.

2° Les nombres premiers restants, c'est-à-dire ceux qui ne vérifient la double inégalité (4) pour aucune valeur de k, donneront, dans les sommes S_n et P_n, les parties S''_n et P''_n.

Considérons le rapport $\rho_n = \frac{S'_n}{S_n}$, lequel est compris entre 0 et 1 : lorsque n augmentera indéfiniment, ce rapport aura, soit une limite, soit des limites d'oscillation. *Si* $\zeta(1 + ti)$ *était nul, cette ou ces limites devraient tendre vers* 1 *avec* s. Autrement dit, ρ étant un nombre quelconque plus petit que 1, on pourrait faire correspondre à toute valeur réelle de s supérieure à 1, mais suffisamment voisine de 1, une valeur de n à partir de laquelle on aurait

$$\rho_n > \rho. \tag{5}$$

On peut, en effet, écrire évidemment

$$P'_n \leqq -S'_n \geqq -\rho_n S_n,$$
$$P''_n \geqq \quad S''_n \cos\alpha \geqq -(1 - \rho_n) S_n \cos\alpha$$

(les inégalités ayant leur sens algébrique). Si donc on avait

$$\rho_n \leqq \rho,$$

il en résulterait

$$P_n \geqq -\theta S_n,$$

où $\theta = \rho + (1 - \rho)\cos\alpha$ est un nombre fixe plus petit que 1 ; et si cela avait lieu pour une infinité de valeurs de n, on pourrait passer à la limite et écrire

$$P \geqq -\theta S,$$

ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse $\zeta(1 + ti) = 0$, ainsi qu'il a été remarqué au numéro précédent.

L'égalité $\zeta(1 + ti) = 0$ exige donc bien que la ou les limites de ρ_n tendent vers 1 avec s.

4. Changeons alors t en $2t$, dans la série (3) et soit Q la nouvelle série ainsi obtenue : les termes qui formaient, dans la série (3), les sommes P'_n, P''_n, $P_n = P'_n + P''_n$ donneront, dans cette nouvelle série, respectivement les sommes Q'_n, Q''_n, $Q_n = Q'_n + Q''_n$ et l'on aura, cette fois,

$$Q'_n \geqq S'_n \cos 2\alpha \geqq \rho_n S_n \cos 2\alpha,$$
$$Q''_n \geqq -S''_n \geqq -(1 - \rho_n) S_n$$

et, par conséquent,

$$[\rho_n \cos 2\alpha - (1-\rho_n)];$$

d'où, moyennant l'inégalité (5) supposée vérifiée pour n suffisamment grand,

$$Q_n \geqq \theta' S_n,$$

θ' désignant le nombre $\rho \cos 2\alpha - (1-\rho)$, lequel est positif si nous avons pris $1 > \rho > \frac{1}{1+\cos 2\alpha}$.

Or, ceci donnerait $Q \geqq \theta' S$ et, par suite, Q augmenterait indéfiniment par valeurs positives; de sorte que le point d'affixe $1 + 2ti$ serait un infini de $\zeta(s)$, ce que nous savons n'avoir pas lieu.

L'impossibilité de l'hypothèse $\zeta(1+ti) = 0$ est donc mise en évidence.

5. Il est remarquable que cette démonstration ne repose que sur les propriétés les plus simples de $\zeta(s)$: nous nous sommes, en effet, exclusivement servi des remarques suivantes : 1° le logarithme de notre fonction est développable en série de la forme $\Sigma a_n e^{-l_n s}$, les nombres a_n étant tous positifs; 2° la fonction est uniforme sur la droite qui limite la convergence de cette série et ne présente sur cette droite qu'un seul pôle simple.

Toute fonction satisfaisant à ces conditions sera donc différente de 0 sur la droite limite.

Ainsi, dans la démonstration précédente, c'était uniquement pour simplifier l'écriture que nous avons réduit le second membre de l'équation (1) à la série S : la démonstration se serait également appliquée au développement complet de $\log \zeta(s)$. De même, les nombres premiers ayant été distribués d'une façon quelconque en deux catégories, les nombres de la première catégorie étant désignés par p', ceux de la deuxième par p'', si la fonction représentée (lorsque la partie réelle de s est supérieure à 1) par le produit infini

$$(6) \qquad f(s) = \frac{1}{\prod_{p'}\left(1 - \frac{1}{p'^s}\right)\prod_{p''}\left(1 + \frac{1}{p''^s}\right)}$$

est holomorphe sur la droite limite $\mathcal{R}(s) = 1$, elle est différente de o sur cette droite ([1]).

En effet, le logarithme du produit

$$f(s)\zeta(s) = \frac{1}{\prod_{p'}\left(1 - \frac{1}{p'^s}\right)^2 \prod_{p''}\left(1 - \frac{1}{p''^{2s}}\right)}$$

est représenté par une série $\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ à coefficients positifs; ce produit satisfait donc aux conditions ci-dessus indiquées.

Ce cas est, par exemple, celui de la fonction de Schlömilch

$$(7) \qquad \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} = \prod_p \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{\frac{p+1}{2}}}{p^s}}.$$

6. Plus généralement, nous allons étendre la proposition qui précède aux séries introduites en Arithmétique par Dirichlet, et dont nous devons tout d'abord rappeler, en les complétant sur certains points, les principales propriétés.

Ces séries appartiennent à la catégorie des séries de la forme $\sum \frac{a_n}{n^s}$ *périodiques*, c'est-à-dire dont les coefficients a_n se reproduisent de k en k. De telles séries sont évidemment des combinaisons linéaires des k fonctions

$$\zeta_1(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{(k+1)^s} + \frac{1}{(2k+1)^s} + \ldots,$$

$$\zeta_2(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{(k+2)^s} + \frac{1}{(2k+2)^s} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\zeta_k(s) = \frac{1}{k^s} + \frac{1}{(k+k)^s} + \frac{1}{(2k+k)^s} + \ldots,$$

étudiées par MM. Hurwitz ([2]) et Cahen ([3]). Ces fonctions sont

([1]) Sauf peut-être au point $s = 1$; mais cette circonstance ne se présentera pas dans la suite.

([2]) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVII, 1882, p. 86-102.

([3]) *Thèse de Doctorat*, 1894, et *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XI.

uniformes dans tout le plan, avec le seul pôle simple $s = 1$ et le résidu correspondant $\frac{1}{k}$, ainsi qu'il résulte de l'expression

(8) $$\frac{1}{2\pi}\Gamma(1-s)\int(-x)^{s-1}\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}dx,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour C partant de $+\infty$ et y revenant après avoir tourné dans le sens trigonométrique autour de l'origine, et $-x$ étant considéré comme ayant (pour x réel et positif) l'argument $-i\pi$ dans la première partie du chemin d'intégration et, par suite, l'argument $+i\pi$ dans la seconde.

L'intégrale qui figure dans la formule précédente est une fonction entière de s, et les théorèmes généraux donnés dans mon Mémoire *Sur les propriétés des fonctions entières* (¹) permettent d'en déterminer le genre. A cet effet, on peut, par exemple, diviser le contour C en deux parties : l'une C′ partant du point $x = 1$ et y revenant après circulation autour de l'origine; l'autre C″ comprenant les deux traits de 1 à $+\infty$; les intégrales prises suivant ces deux traits ne diffèrent entre elles et de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} x^{s-1}\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}dx$$

que par les facteurs exponentiels $e^{-i\pi s}$ pour la première, $e^{i\pi s}$ pour la seconde. Or, le coefficient de s^n dans l'intégrale (9), qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_1^{\infty}(\log x)^n\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\frac{dx}{x},$$

est (puisque r est un entier plus grand que 0) au plus comparable au coefficient correspondant de la fonction

$$Q(s) = \int_1^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,$$

qui intervient dans l'étude de la fonction Γ et dont l'ordre de grandeur pour s infini est celui de Γ. Quant à l'intégrale prise le long

(¹) *Journal de M. Jordan*, 4ᵉ série, t. IX, 1893.

de C′, le coefficient de s^n, qui a pour valeur

$$\frac{1}{n!}\int_{C'} (\log x)^n \frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}\,dx,$$

y est au plus de l'ordre de $\frac{K^n}{1.2\ldots n}$, en désignant par K le module maximum de $\log x$ sur le contour en question. On voit donc que la fonction considérée est de genre 1 : le nombre de zéros de cette fonction, compris dans le cercle de rayon R, est de l'ordre de R log R.

7. Lorsqu'on change s en $1-s$, les nouvelles valeurs des fonctions ξ s'expriment en fonction des anciennes par les relations établies par M. Hurwitz [1] et que l'on peut prendre sous la forme [2]

$$(10)\quad \frac{1}{\Gamma(1-s)}\sum_{l=1}^{k}\sigma^{lr}\xi_l(s) = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s-1}\left[e^{(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_{k-r}(1-s) + e^{-(s-1)\frac{i\pi}{2}}\xi_r(1-s)\right]$$
$$(r=1, 2, \ldots, k),$$

où σ désigne $e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

8. Pour définir ses séries, Dirichlet [3] part de la décomposition du nombre k en facteurs premiers

$$(11)\qquad k = 2^\lambda p^\varpi p'^{\varpi'}\ldots \qquad (\lambda \geqq 0;\ \varpi, \varpi', \ldots > 0),$$

et, à tout entier n premier avec k, fait correspondre les indices

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \gamma',\ \ldots,$$

définis par les congruences

$$n \equiv (-1)^\alpha 5^\beta \pmod{2^\lambda},$$
$$n \equiv g^\gamma \pmod{p^\varpi},$$
$$n \equiv g'^{\gamma'} \pmod{p'^{\varpi'}},$$

(1) Hurwitz, *loc. cit.*, p. 93.
(2) Cahen, *loc. cit.*, nos 47, 53.
(3) *Abhandlungen der Berl. Acad.*, 1837; traduit par Terquem, *Journal de Liouville*, 1re série, t. IV, 1839. Nous nous conformons aux notations employées dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie*, éditées par Dedekind, édition de 1863, supplément VI.

où g, g', ... sont des racines primitives pour les modules respectifs p^{ϖ}, $p'^{\varpi'}$, ... Les nombres α et β sont ainsi définis aux modules a et b près : les nombres a et b ayant tous deux la valeur 1, si $\lambda = 0, 1$, et prenant les valeurs $a = 2$, $b = \frac{1}{2}\varphi(2^{\lambda})$, si $\lambda \geqq 2$. Pareillement, les nombres γ, γ', ... sont définis relativement aux modules

où φ est la fonction bien connue qui exprime combien il y a de nombres premiers à un entier donné et inférieurs à lui.

Réciproquement, la connaissance des indices $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$ fait connaître le nombre n, au module k près. Autrement dit, aux $\varphi(k)$ valeurs de n premières avec k et incongrues entre elles suivant le module k correspondent, d'une façon univoque, les

$$abcc'\ldots = \varphi(k),$$

systèmes de valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$ incongrus entre eux suivant les modules $a, b, c, c', \ldots$.

Désignant par $\theta, \eta, \omega, \omega', \ldots$ respectivement une racine $a^{\text{ième}}$, une racine $b^{\text{ième}}$, une racine $c^{\text{ième}}$, une racine $c'^{\text{ième}}$, ... de l'unité, autrement dit posant

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \pm 1, \\ \eta = e^{\frac{2i\pi\mu}{b}}, \\ \omega = e^{\frac{2i\pi\rho}{c}}, \\ \omega' = e^{\frac{2i\pi\rho'}{c'}}, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Dirichlet introduit la fonction

$$\psi_\nu(n) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ si } n \text{ n'est pas premier avec } k; \\ \theta^{\alpha}\eta^{\beta}\omega^{\gamma}\omega'^{\gamma'}\ldots, \text{ si } n \text{ est premier avec } k, \end{array} \right.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \gamma', \ldots$ étant les indices de n [l'indice ν a pour but de distinguer les unes des autres les $\varphi(k)$ fonctions ψ correspondant aux différents choix possibles des racines $\theta, \eta, \omega, \omega', \ldots$].

Il forme ensuite la série (périodique au sens indiqué ci-dessus)

$$(14) \qquad L_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_\nu(n)}{n^s} = \sum_{r=1}^{k} \xi_r(s)\,\psi_\nu(r) \qquad [\nu = 1, 2, \ldots, \varphi(k)].$$

égale au produit infini

$$L_\nu(s) = \prod \frac{1}{1 - \dfrac{\psi_\nu(q)}{q^s}},$$

dans lequel q doit être remplacée successivement par tous les nombres premiers.

Les séries L_ν se répartissent en trois catégories : la première comprend une seule série L_1, celle qui correspond à

$$\theta = \eta = \omega = \omega' = \ldots = 1;$$

la seconde comprend toutes les séries L, pour lesquelles les nombres θ, η, ... sont égaux à $+1$ ou à -1 (à l'exception de L_1); la troisième, les séries correspondant aux cas où l'un au moins de ces nombres est imaginaire. Ces dernières sont conjuguées deux à deux; la série

$$L_\nu(s) = \sum \xi_r(s)\, \psi_\nu(r),$$

déduite des racines θ, η, ω, ω', ..., est conjuguée de la série

$$L_{\nu'}(s) = \sum \frac{\xi_r(s)}{\psi_\nu(r)},$$

déduite des racines $\frac{1}{\theta}$, $\frac{1}{\eta}$, $\frac{1}{\omega}$, $\frac{1}{\omega'}$, ...

La série L_1 admet, comme seule singularité, le pôle simple $s = 1$. Quant aux autres séries L, elles sont holomorphes dans tout le plan $\left(\text{parce que la somme } \frac{1}{k}\sum \psi_\nu(r) \text{ des résidus au point } s = 1 \text{ est nulle}\right)$. Dirichlet démontre qu'elles sont toutes différentes de 0 pour $s = 1$.

9. De la relation générale (10), M. Hurwitz a pu déduire que certaines séries de seconde catégorie se reproduisent, à un facteur près, par le changement de s en $(1 - s)$ à la façon de la fonction ζ.

Cette proposition est un cas particulier d'un théorème démontré par M. Lipschitz ([1]), et qui est le suivant : *La série* $L_\nu(s)$ *est* (*à un facteur exponentiel et trigonométrique près, analogue à celui qui se*

([1]) *Journal de Crelle*, t. 105, p. 127-157.

rencontre dans la formule relative à la fonction ζ) changée en sa conjuguée par le changement de s en $1-s$, sous les conditions suivantes :

1° $\lambda \geqq 3$, μ *impair*;
2° $\tau \neq p-1$, *si* $\varpi = 1$; τ *non divisible par* p, *si* $\varpi > 1$;
3° $\tau' \neq p'-1$, *si* $\varpi' = 1$; τ' *non divisible par* p', *si* $\varpi' > 1$; ....

Ce théorème nous fournit un renseignement important sur la distribution des zéros de $L_\nu(s)$. Puisque cette fonction n'a aucun zéro imaginaire dont la partie réelle soit plus grande que s, elle n'en a non plus aucun dont la partie réelle soit négative : les zéros imaginaires sont compris dans la même bande que ceux de $\zeta(s)$. Ils sont même, comme ceux de $\zeta(s)$, disposés symétriquement par rapport à la droite $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{2}$, puisqu'à tout zéro α correspond un zéro α' (différent ou non du premier) tel que α et $1-\alpha'$ soient imaginaires conjugués.

Toutefois, cette conclusion n'est pas encore démontrée dans les cas où la relation de Lipschitz ne s'applique pas; mais on ramène ces cas aux autres par les remarques suivantes :

1° Si une racine ω, par exemple, est égale à 1, on aura

$$L_\nu(s) = [1-\psi'_\nu(p)p^{-s}]L'_\nu(s),$$

la série L'_ν étant composée en partant du nombre k supposé débarrassé du facteur p^ϖ. La même circonstance se produit pour le facteur 2 lorsque l'exposant λ est égal à 1.

2° Si l'entier τ est divisible par p^h, la série peut se composer en partant de l'entier k, divisé par p^h, la racine primitive g de p^ϖ étant une racine primitive de $p^{\varpi-h}$. La nouvelle valeur de τ ne contiendra plus p en facteur. Il en est de même pour le facteur 2 lorsque l'entier μ est pair, et aussi lorsque $\lambda = 2$, $\theta = 1$.

3° Le raisonnement de l'auteur est encore valable pour $\lambda = 2$, $\theta = -1$, en prenant pour l'expression (1) $\left(\theta, \psi; e^{\frac{2ri\pi}{2^\lambda}}\right)$ la valeur

$$e^{\frac{2ri\pi}{4}} + \theta e^{\frac{-2ri\pi}{4}}.$$

---

(1) *Loc. cit.*, p. 144, formule (9). M. Lipschitz désigne par la lettre ψ la quantité que nous nommons η.

Notre conclusion est donc établie pour toutes les séries L_ν. On pourrait dès lors développer, sur la distribution des zéros de L_ν, une théorie analogue à celle de M. von Mangoldt [1]. La seule remarque sur laquelle se fonde cet auteur, outre les propriétés communes à $\zeta(s)$ et aux séries L_ν, est que l'argument de $\zeta(s)$ reste fini lorsque le point d'affixe s décrit la droite $\mathcal{R}(s) = a > 1$. Or, cette propriété appartient également aux fonctions L_ν. On pourrait donc compléter l'analyse présentée à cet égard [2] par Piltz.

10. L'équation fondamentale utilisée par Dirichlet pour la démonstration de son théorème, est

$$(16) \qquad \sum_\nu \frac{\log L_\nu(s)}{\psi_\nu(m)} = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum{}' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum{}'' \frac{1}{q^{3s}} + \ldots\right),$$

où m est un entier quelconque premier avec k et où les signes $\sum$, $\sum'$, $\sum''$, ..., s'étendent, le premier aux nombres premiers q tels que $q \equiv m \pmod{k}$, le second aux nombres premiers q tels que $q^2 \equiv m \pmod{k}$, etc. Pour $m = 1$, ceci donne

$$\log \prod_\nu L_\nu(s) = \varphi(k)\left(\sum \frac{1}{q^s} + \frac{1}{2}\sum{}' \frac{1}{q^{2s}} + \frac{1}{3}\sum{}'' \frac{1}{q^{3s}} + \ldots\right).$$

Donc *les séries de Dirichlet n'ont aucun zéro sur la droite* $\mathcal{R}(s) = 1$, car la fonction $\prod L_\nu(s)$ satisfait aux conditions énumérées au nº 5.

II. Conséquences arithmétiques.

11. Nous sommes bien loin, comme on le voit, d'avoir démontré l'assertion de Riemann-Stieltjes; nous n'avons même pas pu exclure l'hypothèse d'une infinité de zéros de $\zeta(s)$ s'approchant indéfiniment de la droite limite. Cependant le résultat auquel nous sommes parvenu suffit, à lui seul, pour démontrer les principales consé-

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 114.

(2) *Habilitationschrift*, Iéna, 1884.

quences arithmétiques que l'on a, jusqu'ici, essayé de tirer des propriétés de $\zeta(s)$.

Tout d'abord on peut remarquer que l'équation

$$\frac{1}{\quad} = \log(s \qquad) + \text{quantité finie}$$

fournit déjà quelques renseignements sur la distribution des nombres premiers. Soit, en effet, a un nombre plus grand que 1, et désignons par N_λ le nombre des nombres premiers compris entre a^λ et $a^{\lambda+1}$. Le premier membre de l'équation précédente est compris entre $\sum \frac{N_\lambda}{a^{\lambda s}}$

et posant $\frac{1}{a^{s-1}} = x$ et remarquant que $\log\frac{1}{x}$ peut être ici remplacé par $1 - x$, on peut écrire, à une quantité finie près, pour x plus petit que 1, mais tendant vers 1

$$\sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda > \log(1 \quad - x) > \frac{x}{a} \sum \frac{N_\lambda}{a^\lambda} x^\lambda,$$

d'où l'on déduit que, ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, on aura une infinité de fois

$$N_\lambda > \frac{(1 \quad \varepsilon) a^\lambda}{\lambda}$$

et une infinité de fois

$$N_\lambda < \frac{(1 + \varepsilon) a^{\lambda+1}}{\lambda + 1},$$

conclusions analogues à celles que donne, par exemple, M. Poincaré dans son *Mémoire sur l'extension aux nombres premiers complexes des inégalités de M. Tchebicheff* (1), et qui suffiraient, comme elles, à établir que si le rapport d'un nombre x à la somme des logarithmes des nombres premiers plus petits que lui a une limite, cette limite ne peut être que 1.

D'autres inégalités pourraient sans doute être tirées de ce fait que, quel que soit le nombre réel t différent de 0, la quantité $\frac{1}{p^s}\cos(t \log p)$ reste finie lorsque s tend vers 1.

(1) *Journal de M. Jordan*, 4e série, t. VIII.

12. Dans son Mémoire précédemment cité, M. Cahen présente une démonstration du théorème énoncé par Halphen : *La somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x.* Toutefois son raisonnement dépend de la proposition de Stieltjes sur la réalité des racines de $\zeta\left(\frac{1}{2}+ti\right)=0$. Nous allons voir qu'en modifiant légèrement l'analyse de l'auteur on peut établir le même résultat en toute rigueur.

A cet effet, au lieu de partir de l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z}\,dz$, égale à 1 ou à 0 suivant que x est plus grand ou plus petit que 1, nous considérerons l'intégrale plus générale

$$J_\mu=\frac{1}{2i\pi}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{x^z}{z^\mu}\,dz.$$

Dans cette intégrale, comme dans la première, x est une quantité positive ainsi que a; μ est positif.

Lorsque μ est un entier, cette intégrale s'évalue par les mêmes méthodes que J, ou s'en déduit par une intégration par parties, déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^\mu}=\frac{(-1)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\frac{d^{\mu-1}}{dz^{\mu-1}}\left(\frac{1}{z}\right).$$

La partie tout intégrée disparaît à l'infini et il vient

$$J_\mu=\begin{cases}0, & \text{si } x<1,\\ \dfrac{1}{\Gamma(\mu)}\log^{\mu-1}x, & \text{si } x>1.\end{cases}$$

La même formule peut se démontrer pour μ non entier, auquel cas il est entendu que z^μ doit recevoir la détermination qui est réelle et positive pour $z=0$. Pour $x<1$, on intégrera le long d'un rectangle ayant un de ses côtés sur la droite $\mathcal{R}(z)=a$ et situé dans la région $\mathcal{R}(z)>a$, le second côté du rectangle augmentant indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}$ $(0<\mu'<\mu)$ du premier. Le résultat est alors évident.

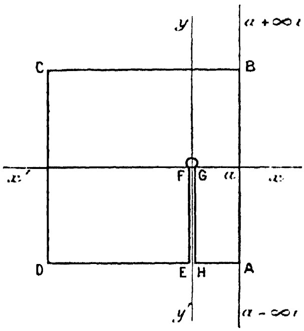
Pour $x>1$, on commencera par supposer $\mu<1$. On intégrera alors le long d'un contour ABCDEFGHA (*fig.* 1) composé encore d'un rectangle ayant un côté AB sur la droite $\mathcal{R}(z)=a$, mais situé dans la région $\mathcal{R}(z)<a$ et interrompu sur son côté DA par

un lacet qui va à l'origine et en revient en suivant la partie négative de l'axe imaginaire. Si le côté BC augmente indéfiniment comme la puissance $\mu'^{\text{ième}}$ $(0 < \mu' < \mu)$ de AB, l'intégrale prise le long des côtés qui s'éloignent à l'infini disparaît et il reste

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi} \lim \left(\int_{HG} + \int_{FE} \right)$$

Or, sur le chemin HG, l'argument de z est $-\frac{i\pi}{2}$, et, sur le

Fig. 1.



chemin FE, $\frac{3i\pi}{2}$. Il vient donc bien

$$J_\mu = \frac{\left(e^{\frac{\mu i\pi}{2}} - e^{-\frac{3\mu i\pi}{2}}\right)}{2\pi} \int_0^\infty \frac{x^{-it}\,dt}{t^\mu}$$

$$= -\frac{e^{-\frac{\mu i\pi}{2}} \sin\mu\pi}{i\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(t\log x) - i\sin(t\log x)}{t^\mu}\,dt = \frac{\log^{\mu-1} x}{\Gamma(\mu)}.$$

Cette formule, établie pour $\mu < 1$, s'étendra au cas de $\mu > 1$ par une intégration par parties déduite de l'identité

$$\frac{1}{z^{\mu+m}} = \frac{(-1)^m \Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)} \frac{d^m}{dz^m} \frac{1}{z^\mu}.$$

13. Parallèlement à la voie suivie par M. Cahen, nous appliquerons la formule (17) à l'intégrale

$$(18) \qquad \psi_\mu(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{x^z}{z^\mu} \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz,$$

où a est un nombre quelconque plus grand que 1. En vertu du développement

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_p \log p\left(\frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \ldots\right),$$

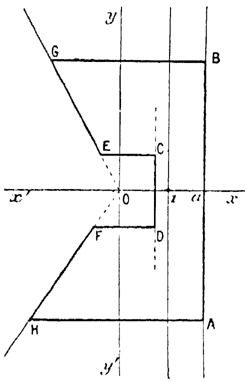
notre formule donne

$$\psi_\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\left(\sum \log p \log^{\mu-1}\frac{x}{p} + \sum{}' \log p \log^{\mu-1}\frac{x}{p^2} + \ldots\right), \tag{19}$$

le signe $\sum$ s'étendant aux nombres premiers plus petits que x, le signe $\sum'$ aux nombres premiers plus petits que $x^{\frac{1}{2}}$, etc.

14. L'avantage que nous trouvons à prendre $\mu > 1$ réside dans la convergence de la série $\frac{1}{|\alpha|^\mu}$, où α désigne successivement les zéros de $\zeta(z)$, convergence sur laquelle reposent, comme nous allons le voir, les raisonnements qui vont suivre.

Fig. 2.



Dans ces conditions, en effet, nous pouvons séparer de l'
des racines α un nombre M de ces quantités assez grand pour que la somme $\sum \frac{1}{|\alpha|^\mu}$, étendue aux racines restantes, soit plus petite qu'un nombre positif quelconque ε. Aucun des α n'ayant sa partie

réelle égale à 1, nous pourrons (*fig.* 2) tracer une parallèle CD à l'axe imaginaire, laissant à sa droite la parallèle $\mathcal{R}(z) = 1$ et à sa gauche les M premières racines α. Des points C, D de cette droite, nous ferons partir des parallèles CE, DF à l'axe réel, parallèles comprenant entre elles les M racines en question, ne passant par aucune autre racine, et que nous prolongerons jusqu'à rencontre en E, F respectivement avec deux droites OEG, OFH issues de l'origine et situées respectivement dans les deux angles formés par la partie négative de l'axe réel avec les deux directions de l'axe imaginaire. Enfin, nous fermerons le contour d'intégration ABGECDFHA (*fig.* 2) par deux parallèles variables BG, AH à l'axe réel (parallèles comprenant, bien entendu, CE et DF entre elles), rejoignant en A, B la droite $\mathcal{R}(z) = a$.

15. Je dis, en premier lieu, que l'on peut éloigner les parallèles BG, AH à l'infini, de telle façon que la partie de l'intégrale ψ_λ relatives à ces droites tendent vers zéro.

On peut suivre pour cela une marche analogue à celle qui est exposée dans mon Mémoire sur les propriétés des fonctions entières [1]. La méthode qui va suivre diffère légèrement de celle-là; elle me paraît plus avantageuse.

Soit A un nombre plus grand que l'unité. Traçons des parallèles à l'axe réel à des distances de cet axe représentées par $A^3, A^6, \ldots, A^{3\lambda}, \ldots$. Le nombre [2] des racines α, dont les coordonnées sont entre $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$ est au plus égal à $K\lambda A^{3\lambda}$, le nombre K étant fini [3], et il en sera de même *a fortiori* de l'intervalle $(A^{3\lambda+1}, A^{3\lambda+2})$; de sorte que si l'on range les racines α par ordre de coefficients de i croissants, il en existera au moins deux consécutives pour lesquelles les coefficients de i différeront d'une quantité supérieure à $\frac{A^{3\lambda+2} - A^{3\lambda+1}}{\ldots} = \frac{A(A-1)}{\ldots}$

(1) *Loc. cit.*, n° 29 et suiv.

(2) Chaque racine est, bien entendu, comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité.

(3) Il est clair qu'on peut se dispenser des précautions que nous prenons ici en utilisant les résultats obtenus par M. von Mangoldt sur la distribution des quantités α; la méthode du texte a l'avantage de s'appliquer chaque fois qu'on connaît le genre de la fonction étudiée.

Nous tracerons, à égale distance de ces deux racines, une parallèle à l'axe réel dont l'ordonnée sera désignée par z_0, et cette ordonnée aura, avec celle de toute racine α, une différence supérieure

$$\frac{\quad}{2K\lambda}.$$

Or, on a

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} &= \sum_\alpha\left(\frac{1}{z-\alpha}+\frac{1}{\alpha}\right)-\sum_\beta\left(\frac{1}{z-\beta}+\frac{1}{\beta}\right)-\frac{1}{z}+C\\ &= \sum_\alpha\frac{z}{\alpha(z-\alpha)}-\sum_\beta\frac{z}{\beta(z-\beta)}-\frac{1}{z}+C,\end{aligned}\right.$$

les α désignant les zéros, les β les pôles (réels et négatifs) de ζ, et C étant une constante. Lorsque z varie sur le segment BG de la parallèle d'ordonnée z_0, le rapport $\frac{z-\beta}{\beta}$ reste supérieur à un nombre fixe, indépendant de β, et il en est de même pour le rapport $\frac{z-\alpha}{\alpha}$, si l'ordonnée de α est extérieure à l'intervalle $(A^{3\lambda}, A^{3\lambda+3})$. Les parties correspondantes du second membre de l'équation (20) donnent donc le produit de z par une somme finie (puisque les sommes $\sum\frac{1}{\alpha^2}$, $\sum\frac{1}{\beta^2}$ sont finies).

Quant aux termes correspondant aux racines α comprises entre les parallèles d'ordonnées $A^{3\lambda}$ et $A^{3\lambda+3}$, elles donneront, d'après ce qui a été dit plus haut, une somme moindre que $K\lambda A^{3\lambda}\frac{2K\lambda A^3}{A(A-1)}$, quantité de la forme $K' z_0 \log z_0$ (où K' est un nouveau nombre fini).

On aura donc

$$\frac{\quad}{\zeta(z)} \qquad K' z_0 \log z_0;$$

d'où en reportant dans notre intégrale

$$\left|\int_{BG}\frac{x^z}{z^\mu}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}\,dz\right| < \frac{K'\log z_0}{z_0^{\mu-1}}\int |x^z|\,dz,$$

quantité infiniment petite pour z_0 infini.

16. L'intégrale prise le long de la droite indéfinie AB peut donc être remplacée par l'intégrale prise le long du contour indé-

fini HFDCEG, augmentée de la somme des résidus relatifs au pôle $z = 1$ et aux zéros α non compris entre les parallèles CE, DF.

Le résidu relatif au pôle $z = 1$ est $-x$.

Les résidus relatifs aux zéros de α non compris entre CE et DF ont une somme moindre que εx, où ε a été choisi aussi petit qu'on veut, et cela indépendamment de x.

Quant à l'intégrale prise le long du contour HFDCBG, elle est infiniment petite relativement à x. Cela est évident pour la partie finie FDCE, où il suffit de remarquer que $\frac{1}{z^\mu}\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ est fini. Sur les parties infinies EG, FH, les rapports sont supérieurs à un nombre fixe, et, par conséquent, la quantité est finie. L'intégrale sur un de ces chemins est donc moindre que $K\int\left|\frac{x^z}{z^{\mu-1}}\right||dz|$ (le nombre K étant fini), c'est-à-dire qu'une quantité finie, décroissante quand x croît.

$\psi_\mu(x)$ est donc asymptotique à x, car, pour rendre la différence $[x - \psi_\mu(x)]$ moindre que ηx, il suffira de choisir $\varepsilon < \frac{\eta}{2}$, puis x assez grand pour que l'intégrale $\int_{\ldots\ldots}$ soit inférieure à $\frac{\eta}{2}x$.

17. Dans l'expression (19) de $\psi_\mu(x)$, nous ferons abstraction des termes compris sous les signes $\sum$ autres que le premier. Le nombre de ces signes est, en effet, moindre que $\frac{\log x}{\log 2}$, et la plus grande des sommes correspondantes est la première, inférieure elle-même à $\log\Gamma\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\log^{\mu-1}x$, par conséquent (à un facteur fini près) à $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu-1}x$. Nous négligeons donc une quantité moindre que $x^{\frac{1}{2}}\log^{\mu}x$; et le résultat obtenu ci-dessus peut s'énoncer ainsi : *la somme* $\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum\log p\,\log^{\mu-1}\frac{x}{p}$, *étendue aux nombres premiers inférieurs à* x, *est asymptotique à* x.

Ce résultat (où il est entendu que nous devons supposer $\mu > 1$) diffère de l'énoncé d'Halphen : *la somme des logarithmes des nombres*

premiers inférieurs à x est asymptotique à x. Nous allons voir qu'il le comprend comme cas particulier.

18. Pour cela, prenons $\mu = 2$, ce qui donne

$$\sum_0^x \log p \log \frac{x}{p} = x(1 + \eta),$$

η étant (pour x assez grand) inférieur en valeur absolue à tel nombre qu'on voudra.

Dans cette relation, changeons x en $x(1 + h)$ et retranchons membre à membre : il vient

$$\sum_0^x \log p \log(1 + h) + \sum_x^{x(1+h)} \log p \log \frac{x(1 + h)}{p} = x(h + \eta),$$

égalité dans laquelle le signe $\sum_\alpha^\beta F(p)$ désigne la somme des valeurs de la fonction F pour les nombres premiers compris entre α et β.

Pour les nombres premiers qui figurent sous le second sig la quantité $\frac{x(1 + h)}{p}$ est comprise entre 1 et $1 + h$: on peut donc écrire, en divisant par $\log(1 + h)$,

$$\sum_0^x \log p < x \frac{(h + \eta)}{\log(1 + h)},$$

$$\sum_0^{x(1+h)} \log p > x \frac{(h + \eta_1)}{\log(1 + h)}.$$

Dans cette dernière, nous changerons x en $\frac{x}{1 + h}$: elle deviendra

$$\sum \qquad \frac{\quad + \eta}{(1 + h)\log(1 + h)}.$$

Les formules (21) et (22) démontrent l'énoncé d'Halphen. On oit, en effet, que $\sum^x \log p$ sera compris entre $x(1 + \rho)$ et $x(1 - \rho)$,

si l'on a choisi h tel que

$$1-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{h}{(1+h)\log(1+h)} < \frac{h}{\log(1+h)} < 1+\frac{\varepsilon}{2}$$

puis x assez grand pour que $\eta < \frac{\varepsilon}{2}\log(1+h)$.

19. Les résultats qui précèdent s'étendent d'eux-mêmes aux séries de Dirichlet. On considérera l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{AB}\left[\sum_{\nu}\frac{1}{\psi_\nu(m)}\frac{L'_\nu(z)}{L_\nu(z)}\right]\frac{x^z}{z^\mu}dz$$

où μ est un nombre plus grand que 1, les autres lettres ayant le même sens que dans les n^{os} 8-10. Cette intégrale représente, à une quantité près infiniment petite relativement à x, le produit de $\varphi(k)$ par la somme des logarithmes des nombres premiers q congrus à m, suivant le module k et plus petits que x, multipliés respectivement par les valeurs correspondantes de $\log^{\mu-1}\frac{x}{q}$.

Or, on peut raisonner sur cette intégrale exactement comme nous l'avons fait sur l'intégrale (18), car les propriétés de $\zeta(s)$, que nous avons utilisées et qui sont relatives à la distribution des zéros et au genre, ont été démontrées pour les séries de Dirichlet. La quantité qui figure sous le signe $\int$ dans l'intégrale (23) a pour pôle simple $z = 1$, pôle de $\frac{L'_1(z)}{L_1(z)}$, et le résidu correspondant $-\frac{x}{\psi_1(m)} = -x$; les résidus relatifs aux autres pôles donnent une somme qu'on peut considérer comme négligeable vis-à-vis de x, ainsi que l'intégrale prise le long du contour GECDFH, comme il a été expliqué.

Donc l'intégrale (23) est asymptotique à x. En suivant la même marche qu'au numéro précédent nous reconnaissons que *la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée de raison k est asymptotique à* $\frac{x}{\varphi(k)}$.

L'équation générale

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum_{0}^{x}\log q \log^{\mu-1}\frac{x}{q}=\frac{x}{\varphi(k)}(1+\rho)$$

qui, comme nous venons de le voir, comprend la relation correspondant à $\mu = 1$, ne paraît pas pouvoir se déduire inversement de celle-ci; il serait intéressant de rechercher quels renseignements cette équation fournit sur l'ordre de grandeur de ρ, c'est-à-dire de l'erreur commise en remplaçant $\sum_{0}^{x}\log q$ par sa valeur asymptotique.

20. En terminant, je signalerai l'application possible de la même méthode aux séries de Weber [1] et de Meyer [2], par lesquelles on étend le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique aux formes quadratiques. Une fois démontré que ces séries sont uniformes, la relation [3], analogue à celle donnée précédemment au n° 10, prouvera qu'elles ne s'annulent pas sur la droite $\mathfrak{R}(s) = 1$.

Dans le cas où le déterminant est négatif, et où l'on considère la forme quadratique seule (sans faire intervenir de progression arithmétique), une formule donnée par Weber [4] fournit la démonstration demandée; en même temps, elle fait connaître le genre de ces séries et fournit la relation correspondant au changement de s en $1 - s$. Les méthodes exposées dans le présent Mémoire sont donc dès à présent applicables à ce cas particulier.

Nota. — Pendant la correction des épreuves, je reçois communication des recherches que M. de La Vallée-Poussin consacre au même sujet dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* [5]. Nos raisonnements, trouvés d'une façon indépendante, ont quelques

(1) *Math. Annalen*, t. XX, p. 301.

(2) *Journal de Crelle*, t. 103, p. 98; *cf.* Bachmann, *Analytische Zahlentheorie*, Ch. X (Teubner, Leipzig, 1894).

(3) Bachmann, *loc. cit.*, p. 291, ligne 6, formule (34).

(4) Bachmann, *loc. cit.*, p. 302, ligne 4.

(5) Tome XX, 2e Partie, 1896.

points communs : il est remarquable, en particulier, de constater que M. de La Vallée-Poussin a été conduit, lui aussi, à employer comme intermédiaire le fait que la fonction ζ n'a pas de racine de la forme $1 + ti$, quoique les procédés de démonstration soient tout à fait différents. Je crois qu'on ne refusera pas à ma méthode l'avantage de la simplicité.

Les critiques, adressées par M. de La Vallée-Poussin aux démonstrations fondées sur l'emploi de l'intégrale $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} x^z \frac{dz}{z}$, n'intéressent point la nôtre, fondée sur l'intégrale

$$\int_{a-}^{a} \qquad x^z\, dz$$

grâce au fait que cette dernière garde un sens, même lorsqu'on remplace chaque élément par son module.

UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION $\zeta(s)$

ET

DES SÉRIES DE DIRICHLET

(*Congrès de l'Association française pour l'Avancement des sciences*, La Rochelle, 1928.)

Les travaux de M. Landau et de ses continuateurs ([1]), parmi lesquels il faut nommer en première ligne M. W. Schnee, ont, comme on le sait, notablement précisé et étendu les conditions de validité d'une formule, analogue à celle de Parseval, obtenue précédemment par nous ([2]) et permettant de multiplier terme à terme deux séries de Dirichlet de la forme la plus générale

$$(s) = \sum$$

(1)

Cette formule s'écrit

$$(2)\qquad \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{+\omega} f(\beta \quad ti)\, g(\gamma - ti)\, dt =$$

où β, γ sont deux nombres réels ou même complexes, de parties réelles convenablement choisies. (Les travaux auxquels nous avons fait allusion tout à l'heure ont eu précisément pour objet d'étendre

---

([1]) *Voir* le Traité classique de M. Landau : *Lehrbuch über die Verteilung der Primzahlen*, t. II, nos 221 et suiv.

([2]) *Acta Mathematica*, t. XXII, 1899, p. 55-63.

le résultat, non seulement au cas où l'une des abscisses β, γ appartient au domaine de convergence simple de la série correspondante, l'autre étant dans le domaine de convergence absolue, mais même à certains cas où, de part et d'autre, il n'y a que convergence simple.)

Mon intention n'est d'ailleurs pas d'aller plus loin dans la voie déjà si remarquablement parcourue, mais d'attirer l'attention sur une particularité intéressante qui se présente lorsque, pour la seconde des séries (1), on prend l'expression bien connue

$$(3) \qquad -\sum\sum$$

Soit, d'abord, $f(s)$ pris lui-même simplement égal à $\zeta(s)$. On voit immédiatement que l'on a (sous les conditions de validité de la formule)

$$\frac{'(\beta+\gamma)}{(\beta} = \qquad \omega$$

Ce résultat peut être considéré comme un simple cas particulier du fait général que toute fonction représentée par une série de la forme $\frac{b_n}{n^s}$ se reproduit purement et simplement lorsqu'on la « compose », par la formule (2), avec $\zeta(s)$. Mais il exprime aussi une propriété fonctionnelle appartenant à la fonction $\zeta(s)$, laquelle figure seule tant dans l'un que dans l'autre membre de la formule.

Mais, au lieu de regarder le premier membre de (3) comme représentant une sorte d'opération fonctionnelle exécutée sur $g(s)$ à l'aide de la fonction $f(s) = \zeta(s)$, on peut se placer au point de vue inverse et, dans ces conditions, la formule se généralise d'une manière remarquable en prenant, pour $f(s)$, l'une quelconque des séries « spéciales » de Dirichlet

$$\chi(n)$$

à l'aide desquelles l'illustre géomètre a démontré son célèbre théorème sur la progression arithmétique. La seconde fonction introduite dans (2) étant encore $g(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$, il vient

$$-\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega}\int_{-\omega}^{\omega} L(\beta+ti,\chi)\frac{\zeta'}{\zeta}(\gamma-ti)\,dt = \sum_m\sum_p \frac{\chi(p^m)\log p}{p^{m(\beta+\gamma)}},$$

c'est-à-dire, comme on sait,

$$\lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\omega} \int_{-\omega}^{\omega} L(\beta + ti, \chi) \frac{\zeta'}{\zeta}(\gamma - ti)\, dt = \frac{L'(\beta + \gamma, \chi)}{L(\beta + \gamma, \chi)},$$

relation qui, comme on le voit, lie les séries (5) à la fonction de Riemann.

Bien qu'il m'ait été jusqu'ici impossible d'en tirer aucun progrès positif, une telle relation me semble digne de l'attention de ceux qui s'intéressent à la théorie analytique des nombres premiers. Je ne saurais dire, quant à présent, dans quelle mesure elle peut conduire à un prolongement analytique des fonctions qui y figurent ni dans quelle mesure elle les caractérise. Il serait également intéressant de rechercher moyennant quelles modifications elle pourrait s'étendre aux autres transcendantes analogues que les divers chapitres de la théorie ont successivement introduites [1].

[1] *Note du Comité de rédaction :* Il nous a semblé utile de reproduire ce travail dans lequel on trouve encore un exemple de l'art avec lequel M. Hadamard soulève des questions nouvelles.

RÉSOLUTION

QUESTION RELATIVE AUX DÉTERMINANTS

(*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 17, 1893, 1re partie.)

1. Étant donné un déterminant

$$\Delta \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

dans lequel on sait que les éléments sont inférieurs en valeur absolue à une quantité déterminée A, il y a souvent lieu de chercher une limite que le module de Δ ne puisse dépasser.

On voit immédiatement que Δ est inférieur à $1.2.3\dots nA^n$. Mais il est clair que cette limite est trop élevée; car elle ne pourrait être atteinte que si tous les termes du déterminant avaient le même signe, ce qui est manifestement impossible.

Je me propose en conséquence de rechercher le maximum du déterminant Δ dans les conditions indiquées.

2. Sans rien supposer d'abord sur les modules des éléments $a_1, \dots,$ $b_1, \dots,$ désignons par $a_1^0, \dots, b_1^0, \dots$ leurs conjugués dont le déterminant Δ_0 sera le conjugué de Δ. Prenons, dans le déterminant Δ, p lignes quelconques pour en former un tableau rectangulaire (T), (T_0) étant le tableau correspondant du déterminant Δ_0; considérons

le produit

Si $p = n$, ce produit donnera $\Delta\Delta_0$, c'est-à-dire le carré du module de Δ; pour $p < n$, il fournira de même la somme des carrés des modules des différents déterminants que l'on déduit du tableau (T). Dans tous les cas, la quantité ainsi obtenue sera essentiellement réelle et positive [1].

Pour former le produit P_p, d'après les règles de la multiplication des déterminants, il faudra multiplier chaque ligne de (T) par chaque ligne de (T_0). Si l'on a choisi deux lignes correspondantes, par exemple les deux lignes de rang h, le résultat s_h donnera la somme des carrés des modules des éléments a_h, b_h, ..., l_h. Si, au contraire, on a pris deux lignes de rangs différents h et h', on trouvera l'expression

$$s_{h,h'} = a_h a_{h'}^0 + b_h b_{h'}^0 + \ldots + l_h l_{h'}^0. \tag{2}$$

Nous remarquerons que $s_{h,h'}$ est conjugué de $s_{h',h}$.

Les quantités s_h et $s_{h,h'}$ seront les éléments du déterminant P_p. Si, par exemple, les lignes qui composent le tableau (T) sont les p premières, on aura

$$P_p = \begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \ldots & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \ldots & s_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \ldots & s_p \end{vmatrix},$$

et, si nous isolons la partie qui contient en facteur un élément principal, le dernier par exemple, nous pouvons écrire

$$P_p = s_p P_{p-1} + Q_p, \tag{3}$$

où Q_p sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \ldots & s_{1,p-1} & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \ldots & s_{2,p-1} & s_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p-1,1} & s_{p-1,2} & \ldots & s_{p-1} & s_{p-1,p} \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \ldots & s_{p,p-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

[1] Nous n'avons pas à prendre en considération le cas de $P_p = 0$, le déterminant Δ étant alors nul et, par suite, ne présentant aucun intérêt dans la question actuelle.

Le mineur de ce déterminant, relatif à la $h^{\text{ième}}$ ligne et à la $h'^{\text{ième}}$ colonne, étant désigné par $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$, nous constatons que les mineurs principaux sont des expressions Q_{p-1} sauf le dernier qui est une expression P_{p-1}. Quant aux autres mineurs, nous remarquerons seulement que $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$ est conjugué de $\frac{\partial Q_p}{\partial(h', h)}$.

3. Cela posé, il est facile de démontrer que le déterminant Q_p est négatif ou nul, le dernier cas ne pouvant se présenter que si tous les éléments de la dernière colonne sont égaux à zéro.

Il suffit pour cela (h étant un quelconque des nombres 1, 2, ..., $p-1$) de considérer les quatre mineurs $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p, p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p, h)}$. L'identité bien connue qui existe entre ces mineurs nous donne une relation de la forme

$$Q_p P_{p-2} = Q_{p-1} P_{p-1} - \left[\frac{\partial Q_p}{\partial(h, p)} \right]^2.$$

Les P étant positifs, nous voyons donc bien que Q_p est nécessairement négatif ou nul si cette conclusion a été démontrée par Q_{p-1}. Nous pouvons dès lors l'admettre pour toute valeur de p, car elle est évidente pour Q_1, égal à 0, et Q_2, égal à $-|s_{1,2}|^2$.

De plus, Q_p ne saurait être nul si Q_{p-1} l'est, c'est-à-dire (en admettant toujours que notre conclusion est établie pour Q_{p-1}) si tous les éléments de la dernière colonne sont nuls à l'exception du $h^{\text{ième}}$. Mais comme h est variable dès que p est au moins égal à 3, il ne peut y avoir aucun élément de la dernière colonne différent de zéro.

4. Revenons maintenant au déterminant P_p : nous sommes en mesure d'établir que ce déterminant est inférieur ou au plus égal à son terme principal $s_1 s_2 \ldots s_p$, l'égalité n'ayant lieu que si tous les éléments non principaux sont nuls.

En effet, nous pouvons admettre que le fait est vrai pour P_{p-1}, et dès lors l'équation (3) démontre l'inégalité $P_p < s_1 s_2 \ldots s_p$, puisque Q_p est négatif.

De plus, P_p ne peut être égal à $s_1 s_2 \ldots s_p$ que si, d'une part, P_{p-1} est égal $s_1 s_2 \ldots s_{p-1}$ et que, d'autre part, on ait $Q_p = 0$. D'après ce

que nous avons vu plus haut, cette double condition exige que tous les éléments non principaux soient nuls.

En particulier, pour $p = n$, on a

$$|\Delta|^2 \leqq s_1 s_2 \ldots s_n.$$

Lorsque les modules des éléments sont au plus égaux à 1, les s_h ont pour valeur maximum n, et par suite $|\Delta|$ est au plus égal à $n^{\frac{n}{2}}$.

On voit que la valeur maximum du déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre est loin d'augmenter aussi rapidement que le produit $1.2\ldots n$. D'après la formule d'approximation de la fonction Γ, elle croît un peu plus vite que la racine carrée de ce produit.

5. Pour que Δ atteigne son maximum, il faut, en premier lieu, que tous les éléments aient pour module 1; puis que tous les $s_{h,h'}$ soient nuls $(h \neq h')$.

En écrivant l'équation $s_{h,h'} = 0$ pour toutes les valeurs de h', l'entier h restant fixe, on a un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux éléments de la $h^{\text{ième}}$ ligne, d'où résulte que chaque élément est proportionnel à la quantité conjuguée du mineur correspondant. Les formules relatives aux déterminants adjoints montrent même que les mineurs d'ordre k sont proportionnels aux mineurs complémentaires d'ordre $n - k$.

Nous sommes ainsi conduit aux déterminants appelés *inversement orthogonaux* par M. Sylvester [1] et dont un exemple simple est fourni, pour une valeur quelconque de n, par le déterminant de Vandermonde formé avec les racines de l'équation binome $x^n = 1$.

6. Pour $n = 3$, ainsi que l'a encore remarqué M. Sylvester, toutes les autres solutions se réduisent à celle-là, à des changements près que l'on peut appeler insignifiants, à savoir : permutation des lignes ou des colonnes; multiplication de tous les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne par un même facteur. Mais il n'en est plus de même pour les valeurs de n supérieures à 3 et la formation d'un déterminant maximum comporte même beaucoup plus d'arbitraire que ne l'a supposé le géomètre anglais.

[1] *Philosophical Magazine*, t. XXXIV, 461-475.

Reprenons en effet la méthode indiquée dans son Mémoire [1] pour construire un déterminant maximum d'ordre $n_1 n_2$ quand on suppose connus deux déterminants maximum Δ_1 et Δ_2 d'ordre n_1 et n_2 respectivement : on écrit n_2^2 fois le déterminant Δ_1, savoir n_2 fois en ligne horizontale sur n_2 fois en ligne verticale, formant ainsi un tableau ($\mathfrak{T}$). Puis dans le déterminant Δ_1 qui occupe dans ce tableau le $h^{\text{ième}}$ rang en ligne horizontale et le $k^{\text{ième}}$ en ligne verticale, on multiplie tous les éléments par l'élément du déterminant Δ_2 dont les indices sont h et k. Le tableau ($\mathfrak{T}$) ainsi modifié donne un déterminant maximum, car les relations $s_{h,k} = 0$ sont vérifiées.

Mais ces relations ne cessent pas d'avoir lieu si, dans tous les déterminants Δ_1 de la première colonne, on multiplie une ligne déterminée par un certain nombre de module 1. Or, le nouveau déterminant obtenu par cette opération (que l'on peut évidemment varier de plusieurs façons) n'est pas réductible au précédent par les changements insignifiants dont nous avons parlé.

Par exemple, pour $n = 4$, M. Sylvester indique les deux types

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

et

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & 1 & i \end{vmatrix}.$$

Notre méthode conduit au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -a & a \end{vmatrix} \qquad (a = e^{i\theta}),$$

lequel donne bien les déterminants (4) et (5) pour $a = 1$ et $a = i$, mais en est essentiellement distinct pour une valeur quelconque de θ.

[1] P. 465, n° 6.

7. Lorsque n est une puissance de 2, le procédé dont nous venons de parler permet d'obtenir un déterminant maximum à éléments réels. Peut-on trouver de tels déterminants pour d'autres valeurs de n ?

Dans ce cas, chaque élément devra être égal à ± 1, et cela de telle façon que, considérant deux lignes quelconques et comparant les éléments correspondants, il y ait autant de concordances que de discordances de signes (¹).

On voit aisément que ceci ne peut avoir lieu que pour n multiple de 4. En effet, si l'on ramène les éléments de la première ligne à être des 1, la seconde ligne devra contenir autant de $+1$ que de -1, ce qui exige déjà que n soit pair : $n = 2n'$. Si l'on suppose alors dans la seconde ligne les n' premiers éléments positifs et les autres négatifs, la somme des n' premiers éléments de la troisième ligne devra être nulle ; donc n' doit être à son tour un nombre pair.

D'ailleurs il existe en effet des déterminants maximum réels pour des valeurs de n non puissances de 2. Pour $n = 12$, par exemple, on arrivera au résultat de la façon suivante :

On groupera les colonnes 3 par 3 en quatre séries.

La première ligne étant composée de 1, la seconde comprendra des 1 dans les deux premières séries et des -1 dans les deux dernières ; la troisième ligne aura ses quatre séries composées alternativement de $+1$ et de -1. Dans les neuf lignes suivantes, la première et la dernière série comprendront chacune deux éléments positifs et un négatif ; la seconde et la troisième deux éléments négatifs et un positif, d'après le Tableau suivant :

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
2	1	2	3
2	2	3	1
2	3	1	2
3	1	3	2
3	2	1	3
3	3	2	1

les numéros indiquant dans chaque série le rang de l'élément qui est seul de son signe.

(¹) SYLVESTER [illegible] *anallagmatique.*

Il existe aussi un déterminant maximum réel pour $n = 20$. Pour l'obtenir, ayant encore partagé les colonnes en quatre séries de cinq chacune, on composera les trois premières lignes comme dans le cas précédent. La quatrième ligne aura, dans la première et la dernière série, tous ses éléments positifs, sauf le premier; dans la deuxième et la troisième, tous ses éléments négatifs, sauf le premier. Chacune des seize lignes qui restent comprendra, dans la première et la dernière série, deux éléments négatifs; dans la deuxième et la troisième, deux éléments positifs, d'après le Tableau suivant :

12	23	23	23
13	23	45	45
14	45	23	45
15	45	45	23
45	12	24	24
45	13	35	35
23	14	24	35
23	15	35	24
35	35	12	25
35	24	13	34
24	35	14	34
24	24	15	25
34	34	34	12
34	25	25	13
25	34	25	14
25	25	34	15

Il y a donc lieu de se demander quelles sont les valeurs de n pour lesquelles existent des déterminants maximum à éléments réels (¹).

De plus, on peut rechercher, pour les autres valeurs, quel est le plus grand module que puisse atteindre le déterminant lorsqu'on impose aux éléments la condition d'être réels (²).

(¹) Les déterminants maximum que nous venons de former pour $n = 12$ et $n = 20$ mettent encore une fois en évidence l'arbitraire que comporte la question actuelle : car il est clair que ces nouveaux déterminants maximum ne peuvent se déduire des procédés donnés au nº 6.

(²) *Note du Comité de rédaction.* Des démonstrations nouvelles du théorème sur le maximum du module d'un déterminant ont été données notamment par Wirtinger (*Bull. des Sci. math.*, 1907, p. 175), Kneser (*Die Integralgleichungen*, 1911, p. 227-231), L. K. Hua (*Tohoku Math. J.*, vol. 41).

FONCTIONS RÉELLES

SUR

LES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 34, 1906.)

1. Soient données les équations

$$X_1 = f_1(x_1, .$$

$$_n = f_n(x_1, x_2,$$

qui peuvent être considérées comme faisant correspondre à un point quelconque $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un espace e_n à n dimensions, un point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ d'un espace analogue E_n, point que nous nommerons ici l'*image* du premier.

Ces équations sont-elles résolubles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$? A tout point de E_n, peut-on faire correspondre d'une manière univoque un point de e_n auquel il serve d'image?

Il est clair que la question est double. Les valeurs de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant données, elle consiste à se demander :

I. Si les équations (1) admettent toujours (en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) une solution; (*possibilité*)

II. S'il est impossible que ces équations admettent plus d'une solution. (*unicité*)

Les méthodes du Calcul différentiel conduisent à en chercher la solution dans les propriétés infinitésimales des fonctions f qui définissent la transformation. Une condition nécessaire bien connue est (en supposant que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ admettent des dérivées premières continues) que *le déterminant fonctionnel*

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \tag{2}$$

soit de signe constant.

Cette condition prise au sens étroit est d'ailleurs suffisante *localement*, c'est-à-dire que, a ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) étant un point de e_n où le déterminant (2) n'est pas nul et A ($A_1, A_2, \ldots, A_n$) son image, on peut, autour de ce dernier point, décrire une sphère assez petite pour qu'un point quelconque pris à son intérieur soit l'image d'un point et d'un seul voisin de a.

2. On a quelquefois admis que la condition précédente était suffisante d'une manière générale, c'est-à-dire que, si elle était vérifiée quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$, elle entraînait, quels que soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, une réponse affirmative aux questions I et II.

Il est pourtant clair, dès le cas d'une variable ($n = 1$), que l'on n'est pas ainsi assuré de remplir la condition I. Si la fonction $X = f(x)$ admet une dérivée première f' toujours positive, l'équation

$$X = f(x)$$

considérée comme équation en x, n'admet jamais plus d'une solution, mais on peut choisir X de manière qu'elle n'en admette aucune, à moins que les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{a} f'(x)\,dx, \quad \int_{a}^{\infty} f'(x)\,dx$$

ne soient infinies.

Pour n supérieur à 1, il est visible qu'il ne suffit pas de remplacer la dérivée f' par le déterminant fonctionnel (2). Par exemple, pour la transformation

$$X = f(x), \qquad Y = \psi(x)\varphi(y),$$

le déterminant fonctionnel est $f'(x)\,\psi(x)\,\varphi'(y)$; on peut, en le supposant supérieur à un nombre positif fixe et même indéfiniment croissant (et cela d'une manière aussi rapide qu'on le veut) avec x ou y, admettre néanmoins que les intégrales (3) sont finies et que, par conséquent, X n'est pas susceptible de prendre toutes les valeurs réelles. Une aire, indéfiniment étendue dans tous les sens, du plan des xy, a alors pour image une aire qui s'allonge indéfiniment dans le sens parallèle à l'axe des Y, mais qui reste comprise entre deux ordonnées fixes.

3. La quantité qu'il convient d'introduire ici, à la place du déterminant fonctionnel, est évidemment l'*axe mineur* μ *de l'ellipse* ou de l'*ellipsoïde de déformation*, c'est-à-dire la plus petite valeur du rapport

$$\overline{\overline{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots +}}$$

et la condition qu'il y a lieu de se donner à cet égard est :

[Condition (C)], que, μ_ρ désignant le *minimum de* μ *sur la sphère*

$$\ldots + x_n^2 = \rho^2$$

de l'espace e_n, *l'intégrale*

$$\int_0^\infty \mu_\rho \, d\rho \tag{5}$$

soit infinie.

Si cette condition est remplie, une ligne de longueur infinie tracée dans e_n ne pourra pas avoir pour image une ligne de longueur finie.

4. Mais la question est loin d'être ainsi résolue. Car, contrairement à ce qui arrive dans le cas d'une variable, on sait que le non-évanouissement du déterminant fonctionnel, dans une région finie, quelconque de e_n, *n'assure même plus l'unicité.* Les fonctions

$$\begin{cases} X_1 = f_1(x_1, x_2), \\ X_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

étant définies dans une région déterminée (σ) du plan des x_1, x_2 et ayant, dans toute cette région, leur déterminant fonctionnel positif

et non nul, une aire s intérieure à σ, limitée par une courbe fermée unique (sans point double) γ, peut avoir pour image une aire se recouvrant partiellement elle-même, γ ayant pour image une courbe Γ à points doubles, analogue à celle qui est représentée figure 1 [1]. Un même point de cette aire peut alors être l'image commune de plusieurs points de s.

En un mot, les données précédentes ne fournissent aucun renseignement sur la résolubilité des équations (1'), sauf à l'intérieur de cercles suffisamment petits — dont les méthodes classiques ne font même pas connaître explicitement le rayon [2].

5. Le fait que je me propose d'établir, et qui peut être de quelque utilité dans la discussion d'équations telles que (1), est que les propriétés infinitésimales des fonctions f suffisent au contraire à étudier leur inversion, *si elles sont connues dans tout l'espace* e_n. L'énoncé est le suivant :

Si μ *est différent de zéro* [3] *en tout point de* e_n *et si, en outre, la condition* (C) (n° 3) *est remplie, les propriétés* I *et* II *ont lieu : autrement dit, l'inversion des équations* (1) *est possible et univoque.*

Ainsi, une transformation *définie à l'intérieur d'une aire* peut présenter à l'intérieur de cette aire la singularité décrite au n° 4. Mais, dans ce cas, la transformation ne saurait être, de quelque manière que ce soit, prolongée indéfiniment en dehors de σ, si l'on impose [4], (outre $\mu \neq 0$) la condition (C).

(1) *Voir*, par exemple, GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 299. — Plusieurs auteurs (LIPSCHITZ, *Lehrbuch der Analysis*, t. II; KNESER, *Math. Ann.*, t. XLV; ARZELA, *Rendic. Ac. Bologne*, 24 mai 1903) se sont efforcés de remédier à cette défectuosité, moyennant l'introduction d'autres hypothèses.

(2) Ce rayon est calculé pour $n = 1$ par M. GOURSAT, *loc. cit.*, p. 41.

(3) La quantité μ est nulle ou différente de zéro en même temps que le déterminant fonctionnel.

(4) Il est à peu près évident que cette dernière restriction (ou une autre analogue) est nécessaire, et que la condition $\mu \neq 0$, même vérifiée dans tout le plan, ne suffit pas à assurer l'unicité.

Soit, par exemple,

$$X_1 = R\cos\Theta, \qquad X_2 = R\sin$$

J'ai indiqué, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 8 janvier 1906), une méthode pour démontrer la propriété précédente, méthode dont je donnerai le principe un peu plus loin. J'ai reconnu depuis que la démonstration pouvait se faire d'une manière tout élémentaire : qu'il suffisait de reprendre, avec d'insignifiantes modifications, un raisonnement classique de théorie des fonctions (le raisonnement non modifié est celui qui servirait à démontrer le théorème dans le cas de multiplicités fermées telles que la sphère).

6. Supposons toujours que les n quantités $X_1, X_2, \ldots, X_n$ soient des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, fonctions dont le déterminant fonctionnel n'est jamais nul. Tout point a $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de l'espace e_n est le centre d'une sphère

$$(6) \qquad (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leqq d^2,$$

telle que deux points distincts pris à l'intérieur de cette sphère ne puissent avoir la même image dans l'espace E_n ; et l'image $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de a est le centre d'une sphère

$$(7) \qquad (X_1 - A_1)^2 + \ldots + (X_n - A_n)^2 \leqq D^2,$$

telle que tout point X intérieur à cette sphère soit l'image d'un point et d'un seul intérieur à (6), point qui varie continûment avec X.

avec

$$R = \qquad \Theta = k\pi \frac{}{e^{x_2} + e} \qquad = k\pi \operatorname{th} x$$

où k est un nombre plus grand que 1. L'image du cercle $x_1^2 + x_2^2 = \rho^2$ aura la forme représentée figure 1 dès que $\operatorname{th} \rho$ dépassera la valeur $\frac{1}{k}$.

Il en sera encore de même si, avec la même valeur de R, on fait

[la fonction $\varphi(x_1)$ étant toujours plus grande que 1 et croissant, pour x_1 très grand et négatif, plus vite que e^{-2x_1}, par exemple $\varphi = \operatorname{Ch}(3x_1)$] ; et dans ce cas le déterminant fonctionnel sera indéfiniment croissant. Il serait constamment égal à 1 si l'on faisait $\Theta = x_2 e^{-2x_1}$ (toujours avec $R = e^{x_1}$).

Si, en quelque point de l'espace, d était infini, le théorème serait démontré. Nous supposons donc qu'il n'en est pas ainsi.

D'après des raisonnements connus, d et, par suite, D sont des fonctions continues de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Lorsque le point a prend toutes les positions possibles à l'intérieur de la sphère de rayon ρ qui a pour centre l'origine des coordonnées, d et D ont chacun un certain minimum (différent de zéro), fonction de ρ.

De même, d et D ont un minimum différent de zéro sur une ligne finie quelconque l décrite par a dans l'espace e_n.

7. Supposons que l soit une ligne continue allant d'un point a à un point b de e_n, et que, d'autre part, son image L dans E_n soit fermée, c'est-à-dire qu'un même point A serve d'image à a et à b. Alors on pourra affirmer que cette ligne est également fermée dans e_n, c'est-à-dire que le point a coïncide avec b, si l'on sait que la valeur de D correspondant à un point c de l et à son image C est supérieure à la plus grande distance de C à un point de L.

8. Cela posé, admettons qu'à deux points distincts a et b de e_n corresponde la même image A. Joignons ab par une ligne l (continue et sans point double), celle-ci aura pour image une ligne L, partant du point A et y revenant. On peut supposer (ce qui n'est d'ailleurs pas indispensable) que L n'a aucun point double, autrement dit, qu'elle ne contient aucun point A′ qui serve d'image commune à deux points a', b' de l, sans quoi il suffirait de substituer A′ à A en ayant soin, s'il y a plusieurs points A′, d'en choisir un pour lequel l'arc compris, sur l, entre a' et b' soit le plus petit possible (1); ou encore, on pourrait évidemment faire disparaître le point double A′ en modifiant l.

Soit D_0 le minimum de D sur l.

Prenons un point fixe arbitraire O (par exemple l'origine des coordonnées) dans E_n et désignons par L_t (où t est un nombre compris entre zéro et un) l'homothétique de L relativement à O avec le rapport d'homothétie t; et, de même, par C_t l'homothétique, dans

(1) Ceci aurait un sens, même si les points A étaient en nombre infini, l'ensemble qu'ils forment étant manifestement fermé.

les mêmes conditions, d'un point quelconque C de L (image d'un point c de l). Soit encore λ le maximum de la distance OC. Deux points quelconques de L seront alors à une distance inférieure à 2λ, et, par conséquent, d'après le n° 7, on devra avoir, la ligne l étant ouverte,

$$2\lambda \geqq D_0. \tag{8}$$

Donnons à t une valeur quelconque comprise entre l'unité et le nombre t_1 (positif, d'après l'inégalité précédente) qui vérifie la relation

Tout point $C_{,}$ de $L_{,}$ sera à une distance de son homothétique C moindre que $\frac{D_0}{3}$ et, par conséquent, sera l'image d'un point parfaitement déterminé de $e_{,,}$, intérieur à la sphère σ analogue à (6) qui a pour centre c.

Seront également à une distance du point C moindre que D_0, les points de $L_{,}$ homothétiques des points situés sur un certain arc de L, à savoir l'arc continu qui comprend le point C et dont tous les points sont à une distance de C moindre que $2\frac{D_0}{3}\cdot$ Tout l'arc ainsi obtenu de $L_{,}$ correspondra donc à un certain arc de courbe de $e_{,,}$ intérieur à σ.

Chaque point $C_{,}$ de $L_{,}$ peut ainsi être déduit, non seulement du point homothétique C, mais d'une infinité d'autres points de L (points suffisamment voisins du premier) et l'on a, par conséquent, une infinité de moyens de trouver le point correspondant de $e_{,,}$; mais, en vertu du n° 7 et des hypothèses faites sur t, toutes ces déterminations conduiront au même résultat.

En un mot, à chaque ligne $L_{,}$, pour $1 \geqq t \geqq t_1$, correspondra une ligne continue $l_{,}$ de $e_{,,}$, laquelle variera d'une manière continue avec t. Comme $l_{,}$ ne sort pas d'une région finie de l'espace $e_{,,}$, D, sur ces différentes lignes $l_{,}$, ne sera jamais inférieur à un certain minimum D'.

Il en résulte que la ligne $l_{,}$ ne se ferme à aucun moment, car ses deux extrémités, autrement dit les deux points qui ont pour image $A_{,}$,

varient continûment et, par conséquent, ne sauraient coïncider sans que leur distance soit au préalable devenue inférieure à D', ce qui est impossible.

9. Soit D_1 le minimum de D sur L_{t_1} : on aura, puisque L_{t_1} ne se ferme pas, l'inégalité analogue à (8)

$$2\lambda t_1 \geqq D_1.$$

Déterminons un nombre t_2 par la relation

$$\lambda(t_1 - t_2) = \frac{D_1}{3};$$

t_2 sera positif et nous trouverons par des raisonnements tout semblables aux précédents, pour toute ligne L_t telle que $t_1 \geqq t \geqq t_2$, une ligne correspondante l_t continue et ouverte de l'espace e_n, ligne qui variera continûment avec t. Il résultera de là, en particulier, l'inégalité

$$2\lambda t_2 \geqq D_2,$$

D_2 étant le minimum de D sur l_{t_2}.

On déterminera alors t_3 par la relation

$$\lambda(t_2 - t_3) = \frac{D_2}{3},$$

et ainsi de suite. D'une manière générale, t_p sera déterminé par la relation

(D_{p-1} étant le minimum de D sur $l_{t_{p-1}}$) et sera positif en vertu de l'inégalité

$$2\lambda t_{p-1} \geqq D_{p-1}.$$

Pour toute valeur de t comprise entre 1 et t_p, la ligne l_t, ayant pour image L_t, sera définie : ce sera une ligne continue, variant continûment avec t et qui restera toujours ouverte.

10. Cela posé, il va être aisé de faire apparaître une contradiction. On ne pourrait, en effet, imaginer que deux hypothèses :

1° Toutes les lignes l_{l_p} resteront, quel que soit p, à distance finie, c'est-à-dire intérieures à une sphère fixe ayant pour centre l'origine des coordonnées dans l'espace e_n.

Il y a contradiction, car, dans ces conditions, D_p resterait supérieur à un nombre fixe et les quantités t_p définies par les relations successives (9) ne pourraient pas être toutes positives.

2° La quantité $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ prend, sur la ligne l_{l_p}, des valeurs très grandes pour des valeurs très grandes de p.

Mais cela aussi est impossible. En effet, un point quelconque de L_{l_p} est relié à son homothétique pris sur L par une ligne continue (une portion de rayon vecteur) de longueur inférieure à λ. Donc le point correspondant de l'espace e_n est intérieur à la sphère qui a pour centre l'origine et dont le rayon R est donné par la relation

μ_ρ étant, comme nous l'avons dit, le minimum de μ sur la sphère (4).

Donc, il est inadmissible que les points a et b, qui ont une même image A, soient distincts. C'est ce que nous voulions établir.

11. Le mode de démonstration que j'avais adopté dans la Note citée, et qui était relatif au seul cas de $n = 2$, était plus compliqué, mais il avait l'avantage de montrer comment se comporte le prolongement d'une transformation telle que (1′), à partir du moment où elle a cessé d'être biunivoque; comment ce prolongement, possible tout d'abord, doit fatalement se heurter à une impossibilité à mesure qu'on voudra l'étendre indéfiniment.

Soit $n = 2$, de sorte que e_n et E_n sont des plans. Supposons toujours que le déterminant fonctionnel des seconds membres des équations

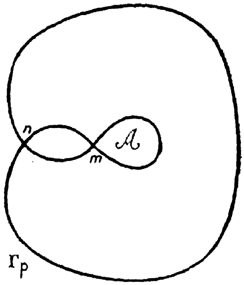
(1′)

soit positif et non nul, et considérons la courbe Γ_ρ, image du cercle γ_ρ $(x_1^2 + x_2^2 = \rho^2)$, cercle dont le rayon sera, pour la commodité du langage, considéré comme représentant le temps. C'est une courbe fermée dont la tangente varie continûment et à la courbure de laquelle on peut assigner une limite supérieure dès qu'on connaîtra une limite supérieure de ρ. X_1 et X_2 étant donnés, le nombre des solutions des équations (1′) à l'intérieur de γ_ρ est égal à l'indice (au sens de Gauss) du point (X_1, X_2) par rapport à Γ_ρ. L'indice d'un même point va toujours en croissant lorsque ρ croît.

Si, à partir d'une certaine valeur ρ_0 de ρ, cet indice peut devenir supérieur à 1, la ligne Γ_ρ devra présenter des points doubles. C'est la forme représentée figure 1 et (au moins pour ρ peu supérieur à ρ_0) Γ_ρ délimitera au moins une aire intérieure telle que $\mathcal{A}$ (*fig.* 1).

Appelons *boucle* le contour fermé partiel formé par la partie de Γ_ρ qui part d'un point double (*sommet* de la boucle) et y revient. Tout point double partage Γ_ρ en deux boucles. Une boucle sera dite *simple* si, considérée en elle-même, elle n'admet aucun point double. L'aire $\mathcal{A}$ est limitée par une boucle simple de sommet m (*fig.* 1).

Fig. 1.



Les tangentes en un point double déterminent quatre angles (qui peuvent être égaux à 0 ou à π) et les arcs de courbes correspondants, au voisinage de ce point, déterminent quatre angles curvilignes. Nous appellerons *extérieur* celui de ces quatre angles où l'indice (relatif au contour complet) est le plus petit; *intérieur*, celui où il est le plus grand (ces deux indices extrêmes différant de deux unités); *latéraux*, ceux où il a la valeur intermédiaire, l'un de ces latéraux étant à *droite* et l'autre à *gauche*, par rapport à une flèche allant de l'angle extérieur à l'angle intérieur.

Les deux boucles que détermine le point double ont pour angles aux sommets, l'une l'angle extérieur, l'autre l'angle intérieur, à l'exclusion des latéraux (comme on le reconnaît en remarquant que l'indice relatif au contour total est égal à la somme des indices relatifs aux deux boucles). Nous les appellerons l'une *extérieure*, l'autre *intérieure*, suivant la nature de leurs angles aux sommets.

La boucle qui délimite l'aire $\mathcal{A}$ (*fig.* 1) est, dans cette terminologie, une boucle simple extérieure. L'indice y est plus petit que dans les régions voisines.

Nous allons prouver que, sur notre contour mobile, une telle boucle extérieure est indestructible. Tous les contours Γ_ρ, pour $\rho > \rho_0$, admettront de telles boucles extérieures, et ces boucles successives seront intérieures les unes aux autres.

Pour le démontrer, supposons d'abord que les f soient des fonctions analytiques, n'ayant pas à distance finie de points singuliers. Dans ces conditions, Γ_ρ ne pourra présenter qu'un nombre fini de points doubles, et le nombre ou la disposition de ceux-ci ne changeront qu'un nombre fini de fois dans un temps fini (c'est-à-dire dans un intervalle fini de variations de ρ).

D'une manière générale, les points doubles d'un contour fermé régulier qui se déforme ne peuvent apparaître ou disparaître que de deux façons :

1° Par une boucle infiniment petite : tel est le cas d'un limaçon de Pascal, considéré comme polaire d'un cercle par rapport à un point, lorsque ce dernier passe de l'intérieur à l'extérieur du cercle ou inversement.

Cette hypothèse est à rejeter ici, car la boucle infiniment petite aurait sa courbure infinie, ce que nous avons remarqué être impossible.

2° Par un biangle infiniment petit, un biangle étant un contour fermé partiel de Γ_ρ qui présente deux points anguleux (sommets du biangle), points doubles de Γ_ρ : par exemple, le contour de la figure 1 présente un biangle de sommets m, n.

Un biangle peut être extérieur, ou intérieur, ou latéral, suivant la nature de ses angles aux sommets, nature qui est la même pour les deux sommets si le biangle est infiniment petit, et qui ne change pas par une déformation continue.

Il est impossible que les deux sommets d'un biangle *latéral* soient les deux seuls points doubles du contour (puisqu'on aurait ainsi des boucles latérales). Si l'on enlève du contour un biangle extérieur, il reste deux boucles intérieures, et inversement.

Enfin, dans le cas qui nous occupe, où le contour va toujours en s'étendant et les indices toujours en augmentant, un biangle qui naît ne peut pas être extérieur, et un biangle qui disparaît ne peut pas être intérieur. Cela tient à ce que, dans le premier cas, la région qui prend naissance doit avoir un indice plus grand et dans le second, la région qui disparaît, un indice plus petit que l'une au moins des régions avoisinantes.

12. Cela posé, reprenons la boucle simple extérieure dont nous avons noté l'existence pour ρ très peu supérieur à ρ_0 :

1° Si le point double m, sommet de la boucle, ne disparaît pas, et si aucun autre point double ne naît sur le contour de la boucle, celle-ci ne cessera pas d'être simple et extérieure. De plus, toutes les boucles successives ainsi obtenues seront intérieures les unes aux autres, puisque le contour se déplace toujours vers le côté où l'indice diminue.

2° Si, à partir d'une certaine valeur $\rho_1 > \rho_0$, la boucle, jusque-là simple, présente deux points doubles [1], ceux-ci ne peuvent naître par biangle latéral (puisqu'ils ne pourraient alors être les premiers), ni par biangle extérieur (lequel ne peut que disparaître et non pas naître). Ils forment donc un biangle intérieur et donnent, par conséquent, lieu à deux boucles extérieures. Celle de ces boucles qui ne contient pas le

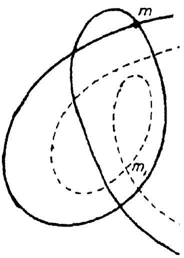
[1] Nous supposons, pour plus de commodité, que deux apparitions ou disparitions de points doubles ne peuvent se produire à la fois pour une même valeur de ρ. Il est clair qu'il n'y a là qu'une simplification de langage, dont le raisonnement est indépendant en réalité.

point m (sommet de la boucle primitive) est simple : ce sera elle que l'on considérera pour $\rho > \rho_1$ aux lieu et place de la première.

3° Si, pour une valeur $\rho_2 > \rho_0$, le point double m disparaît, cela ne peut être que par biangle latéral (puisque l'angle *extérieur* en m correspond à une boucle simple). Si ce biangle devient infiniment petit, c'est que l'une des branches qui se croisent en m, après être sortie de la boucle, y pénètre à nouveau immédiatement (*fig.* 2) ([1]). Mais il est clair qu'elle doit en sortir ultérieurement et son point de sortie le plus rapproché m_1 (*fig.* 2) est le sommet d'une nouvelle boucle simple extérieure ([2]).

Donc, l'indestructibilité de la boucle simple extérieure est assurée dans tous les cas.

Fig. 2.



13. Jusqu'à ce point, d'après ce qui précède, notre raisonnement n'est nullement un raisonnement par l'absurde. Il existe des transformations planes, à déterminant fonctionnel constamment positif, et pour lesquelles la déformation du contour Γ_ρ présente les phénomènes que nous venons d'étudier.

Supposons maintenant que ρ augmente indéfiniment. Nous aurons une série de boucles simples, intérieures les unes aux autres. Il existera, dès lors, au moins un point P du plan des X_1, X_2, qui sera intérieur à tous ces contours.

Or, dans ces conditions, les points d'intersection de ceux-ci avec une droite issue de P décriraient sur cette droite un segment (ou une série de segments) de longueur finie, correspondant à une augmentation indéfinie de ρ, contrairement à l'hypothèse.

La contradiction est donc mise en évidence, et la boucle primitive ne peut prendre naissance.

([1]) La ligne pleine représente la forme du contour pour $\rho < \rho_2$ et la ligne ponctuée cette même forme pour $\rho > \rho_2$.

([2]) On peut constater directement que Γ_ρ ne peut avoir de boucle simple intérieure. Car, comme précédemment, une telle boucle ne pourrait commencer à exister que : 1° si elle naît, son sommet apparaissant par un biangle, mais alors ce biangle serait intérieur et la boucle extérieure; 2° si, une fois formée, elle devenait simple par disparition de points doubles sur son contour, mais cette disparition ne se ferait que par biangle extérieur, et supposerait, contrairement à l'hypothèse, une boucle simple intérieure préexistante.

14. Le raisonnement précédent serait mis en défaut pour des transformations non analytiques, parce que les points doubles pourraient être en nombre infini ou se modifier une infinité de fois dans un temps fini.

Mais on peut le rétablir par des conventions convenables.

Soit, comme tout à l'heure, ρ le rayon vecteur, et soit θ l'angle polaire du plan des x_1, x_2. Soient α un angle du premier quadrant pris une fois pour toutes (par exemple $\alpha = 10^o$), ε un nombre positif. Si ce dernier est suffisamment petit [la limite supérieure de ce nombre pouvant être assignée lorsqu'on connaît une limite supérieure (ρ) de ρ] :

a. Tout point double de Γ_ρ, correspondant à deux valeurs θ_1, θ_2 de θ, et pour lequel les deux branches se coupent sous un angle compris entre α et $\pi - \alpha$, est isolé, en ce sens qu'il ne peut, ni sur le même contour Γ_ρ ni sur $\Gamma_{\rho'}$, pour $|\rho - \rho'| > \varepsilon$ exister plus d'un point double correspondant à deux valeurs θ'_1, θ'_2 de θ telles que $|\theta_1 - \theta'_1| < \delta$, $|\theta_2 - \theta'_2| < \delta$, où δ est une quantité que l'on peut assigner en fonction de (ρ).

Le point double en question de $\Gamma_{\rho'}$ correspond à un point double parfaitement déterminé de Γ_ρ.

b. Si, au contraire, l'angle au point double est compris entre o et α, ou entre π et $\pi - \alpha$, il pourra arriver que, dans un certain intervalle de variation de θ autour de l'une des deux valeurs de l'angle polaire correspondant à ce point (*dépendance* du point double), les deux branches restent à une distance moindre que ε.

Le point double en question pourra alors appartenir à une *série* de points doubles, en appelant *série* un ensemble de points doubles qui sont dans la dépendance les uns des autres.

Toute série (même d'une infinité) de points doubles a d'ailleurs deux points doubles extrêmes déterminés. Elle sera, au point de vue du raisonnement, entièrement assimilable à un seul point double ou à deux, suivant que les deux portions de contours qui se croisent changeront ou non de côté l'une par rapport à l'autre au passage de cette série. Dans le second cas, on pourra toujours dire si cette série est assimilable à un biangle *extérieur*, *intérieur* ou *latéral*.

Enfin, on pourra définir les conditions dans lesquelles un point double P′ (ou une série de points doubles) de $\Gamma_{\rho'}$ ($0 < \rho' - \rho < \varepsilon$) sera dit *dériver* d'un point double P de Γ_ρ (ou d'une série de points doubles).

Moyennant ces conventions, rien n'empêchera de raisonner comme nous l'avons fait pour les transformations analytiques.

15. Notre conclusion est, comme on le voit, liée de la manière la plus absolue à ce fait que la transformation est considérée dans le plan *complet* [1]. Elle ne subsisterait plus nécessairement dans

---

[1] Ajoutons que l'unicité peut cesser dès que $\int_0^\infty \mu_\rho \, d\rho$ est fini, si lentement que

une région limitée par une ligne quelconque Λ, à moins que l'on ne possède d'autres données; que l'on ne connaisse, par exemple, la propriété d'unicité pour les points qui correspondent à des points de Λ.

La conclusion est évidente sur la sphère (notre démonstration se confondant alors, comme nous l'avons dit, avec une démonstration classique).

Par contre, elle ne subsiste pas sur les variétés multiplement connexes, telles qu'un tore, ou un cylindre de révolution indéfini. Sur ce dernier, par exemple, si z et θ sont (avec le rayon a du cylindre) les coordonnées semi-polaires, la transformation

$$\theta, \quad p\theta$$

(p étant un entier quelconque) n'est pas biunivoque, quoique μ soit constant.

16. Quant à la *possibilité* de l'inversion, elle résulte de considérations toutes semblables à celles qui ont été précédemment développées, mais plus simples encore et presque évidentes.

Soient O l'origine des coordonnées de E_n, correspondant, pour simplifier, à l'origine des coordonnées o de e_n; A un point quelconque de E_n. Joignons OA. Le cercle (7) de centre O intercepte sur OA un segment OO_1, qui est l'image d'un arc de courbe oo_1 de e_n. Le cercle (7) de centre O_1 intercepte un segment de O_1O_2, image d'un arc o_1o_2 de e_n, et ainsi de suite.

Si les points successifs o_n restent à distance finie, les segments O_nO_{n+1} sont tous plus grands qu'une longueur fixe. Mais, dans le cas contraire, nous savons que la ligne $OO_1O_2 \ldots O_n \ldots$ doit également avoir une longueur infinie.

μ décroisse, à cette condition près. Il suffira, par exemple, de prendre (en employant la même notation que dans la note de la page 148) $\Theta = x_2$, en choisissant pour R une fonction constamment croissante de x_1 coïncidant, pour les valeurs négatives de x_1, avec

$$) = a + \int_{-\iota}^{\iota} \qquad \cdot o).$$

Donc, en toute hypothèse, l'un des segments $O_n O_{n+1}$ comprend le point A, et celui-ci est l'image d'un point de e_n.

17. Remarquons, pour finir, que les hypothèses de dérivabilité faites en commençant sur nos fonctions f_i ne sont nullement nécessaires. Il suffit de supposer ces fonctions *continues*, et d'imposer les conditions suivantes :

A. Tout point a de e_n est le centre d'une sphère σ_a telle que deux points distincts intérieurs à cette sphère ne puissent avoir la même image.

B. L'image de tout point a de e_n est (dans E_n) le centre d'une sphère telle que tout point intérieur à cette sphère soit l'image d'un point intérieur à σ_a.

C. Une ligne joignant l'origine à un point indéfiniment éloigné dans e_n ne peut avoir pour image une ligne rectifiable et de longueur finie de E_n.

Les deux premières reviennent à dire que le résultat que l'on se propose de démontrer est supposé vrai *localement*, c'est-à-dire au voisinage d'un point quelconque.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

ET

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SUR

L'ITÉRATION ET LES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 29, 1901.)

Les travaux de M. Poincaré ont montré comment une solution périodique d'un système d'équations différentielles quelconques était, en général, entourée d'un cortège de solutions asymptotiques. Dans certains cas, toute solution suffisamment voisine de la solution périodique est par cela même asymptotique. Dans d'autres, l'asymptotisme n'a lieu que pour les trajectoires situées sur certaines surfaces passant par la courbe fermée qui sert de point de départ. Pour former les équations de ces surfaces, M. Poincaré emploie des développements en séries entières, établis en supposant les équations données analytiques.

Il m'a paru intéressant de traiter la même question au point de vue exclusivement réel et sans faire intervenir l'analyticité des données. Je me bornerai d'ailleurs aux cas les plus simples et aux résultats les plus immédiats.

Le problème revient, comme on sait, à celui de l'itération à plusieurs variables. Soit donc

$$x_1 = f(x, y) = ax + by + \ldots,$$
$$y_1 = \varphi(x, y) = cx + dy + \ldots$$

une transformation ponctuelle du plan, conservant l'origine. Nous supposerons que l'équation

$$\begin{matrix} a-s & b \\ c & d-s \end{matrix}$$

ait ses racines s, s' réelles et distinctes. Alors, moyennant un changement de coordonnées, la transformation s'écrira

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y) = sx + F(x, y), \\ y_1 = \varphi(x, y) = s'y + \Phi(x, y), \end{cases}$$

F et Φ étant des fonctions dont les développements (formels) commencent par des termes du second degré. Nous admettrons que F et Φ ont des dérivées partielles dans un certain domaine entourant l'origine, ces dérivées partielles étant continues et, en particulier, tendant vers zéro avec x et y. Enfin s, supposé plus grand que s' en valeur absolue (l'égalité étant exclue), sera positif et plus grand que 1.

Le point (x_1, y_1) est dit le *conséquent* de (x, y) et celui-ci l'*antécédent* de (x_1, y_1); le point (x_2, y_2), conséquent de (x_1, y_1), est dit le *second conséquent* de (x, y), etc.

Une circonférence de rayon suffisamment petit, décrite avec l'origine pour centre, aura pour conséquente, moyennant les hypothèses faites sur s et s', une sorte d'ellipse allongée suivant l'axe des x; celle-ci aura, à son tour, pour conséquente une courbe de forme analogue, mais plus allongée encore, et ainsi de suite. Dès lors, il est à présumer que toute la partie du plan entourant l'origine ira en s'amincissant indéfiniment et tendra vers une courbe unique. C'est ce que nous allons vérifier.

A cet effet, traçons, en partant de l'origine, un arc de courbe C non tangent à l'axe des y, arc sur lequel y sera bien déterminé en fonction de x et $\frac{dy}{dx}$ partout inférieur en valeur absolue à un certain nombre α. Il est aisé de voir, étant données les hypothèses faites sur les fonctions f et φ, que la conséquente de la courbe C jouira de la même propriété, du moins si l'on se restreint (comme nous allons le faire) à un certain domaine D entourant l'origine. Toutes les conséquentes successives seront donc coupées par une parallèle quelconque à l'axe des y en un seul point et les coefficients angulaires de leurs tangentes et, par conséquent aussi, de leurs cordes quelconques, seront tous moindres que α.

Soit C' une seconde courbe remplissant les mêmes conditions que C. Si nous coupons ces deux lignes par une même droite $x =$ const.,

la différence $y - y'$ sera nulle avec x et le rapport $\frac{|y - y'|}{x}$ aura, dans le domaine D, un certain maximum μ.

Soient maintenant C_1, C'_1 les conséquentes de C et de C'; μ_1 la quantité analogue à μ déterminée à l'aide de C_1 et de C'_1. Le rapport $\frac{\mu_1}{\mu}$ est *inférieur à un nombre fixe* σ *plus petit que* 1, à savoir un nombre supérieur d'aussi peu qu'on veut à $\frac{|s'|}{s}$, si le domaine D a été pris suffisamment restreint.

Désignons, en effet, par Y, Y' les ordonnées de C et de C' correspondant à une même valeur X de l'abscisse (X étant supposé positif pour fixer les idées); y_1, y'_1, les ordonnées analogues de C_1 et de C'_1. Les points (X, y_1) et (X, y'_1) seront les conséquents de deux points (x, y) et (x', y') respectivement situés sur C et sur C_1.

De l'hypothèse faite sur C résulte

$$|y| < \alpha x, \tag{2}$$

et des hypothèses faites sur F et Φ

$$|X - sx| < \eta(x + |y|), \tag{3}$$

η pouvant être pris aussi petit qu'on veut avec les dimensions du domaine D.

Ces deux inégalités montrent que x, et pareillement x', sont tous deux plus petits que $\frac{X}{s - \eta(1 + \alpha)}$.

Si enfin y'_0 est le point de C'_1 correspondant à l'abscisse x, on a

(4) $\quad s - \eta(1 + \alpha)$
$\quad \alpha\,|x' - x|.$

D'autre part, puisque les dérivées de F et Φ sont toutes en valeur absolue plus petites que η, on peut écrire

(6) $\quad |x \quad x'| < \qquad y - y'$

et, par suite, en vertu de (4) et de (5),

(6') $\quad |y \qquad | < |y'_0 - y| < \frac{\mu X(s - \eta)}{|s - \eta}$
$\quad s -$

puis

$$(7) \qquad |y_1 - y'_1 - s'(y - y')| < \qquad\qquad y -$$

Les inégalités (2) à (7) donnent bien, ainsi que nous l'avions annoncé,

$$(8) \qquad |y_1 - y'_1| < \quad \frac{s'}{s} + \varepsilon \;\; X,$$

ε étant limité en fonction de η et de α et tendant vers zéro avec η.

Il est aisé de déduire de là que *les conséquentes successives de* C *tendent vers une courbe limite* $\mathcal{C}$. Supposons, en effet, que C' coïncide avec C_1 : alors C'_1 ne sera autre que la seconde conséquente C_2 de C. Le segment intercepté, sur l'ordonnée correspondante à l'abscisse X, entre C et C_1 étant plus petit que μX, celui qui est intercepté entre C_1 et C_2 sera plus petit que $\mu\sigma X$; celui qui est intercepté entre C_2 et C_3, plus petit que $\mu\sigma^2 X$, ... Ces segments formeront donc une série convergente.

De plus, *la courbe* $\mathcal{C}$ *obtenue est indépendante du choix de la courbe* C, puisque si C' est une autre courbe quelconque (issue de l'origine et non tangente à l'axe des y), C'_1, C'_2, ..., C'_n, ..., ses conséquentes successives, le segment intercepté sur une ordonnée quelconque entre C_n et C'_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

La courbe $\mathcal{C}$ est évidemment invariante (c'est-à-dire coïncide avec sa conséquente), et l'on voit, de plus, que c'est la seule courbe invariante qui aboutisse à l'origine, s'y comporte régulièrement et ne soit pas tangente à l'axe des y.

On remarquera que *ces différents résultats ne supposent nullement* $|s'| < 1$. Si l'on ajoute cette nouvelle hypothèse, il arrivera que les *antécédentes* d'une courbe quelconque issue de l'origine (et non tangente à l'axe des x) tendront également vers une position limite déterminée $\mathcal{C}'$, laquelle sera tangente à l'axe des y.

Les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ seront alors les lieux géométriques, l'une des points dont les antécédents successifs tendent vers l'origine, l'autre des points dont les conséquents successifs tendent vers l'origine. Ce sont elles qui interviennent dans la théorie des solutions asymptotiques.

LES

SURFACES A COURBURES OPPOSÉES

ET

LEURS LIGNES GÉODÉSIQUES

(*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. IV, 1898.)

Dans un Mémoire précédent [1], nous avons appliqué les considérations élémentaires de maximum et de minimum à l'étude des géodésiques réelles sur des surfaces quelconques et considéré, en particulier, un cas où les énoncés obtenus prennent une forme particulièrement simple : celui des surfaces à courbure partout positive. Je me propose actuellement de traiter, en me plaçant au même point de vue, c'est-à-dire en restant dans le domaine réel et faisant complètement abstraction de la nature analytique de la surface, le cas où la courbure est partout négative. Dans ce nouveau cas, il est possible d'arriver à des résultats beaucoup plus complets que dans le premier et d'établir sans difficulté une discussion générale des géodésiques.

Les principes mis en œuvre sont d'ailleurs les mêmes que dans le Mémoire précédent. Toutefois, j'ai reconnu que le théorème de Gauss sur les polygones géodésiques est susceptible de remplacer, dans la plupart des démonstrations, les considérations de Calcul

---

(1) Ce *Journal*, même série, t. III, 1897, p. 331-388.

différentiel dont je m'étais servi à cet endroit; de sorte que, dans presque toute la suite de ce travail, nous disposerons de deux voies toutes deux extrêmement élémentaires, pour établir chacune de nos propositions. Une seule théorie exige d'être approfondie d'une façon spéciale pour servir de base au travail actuel : c'est l'*Analysis situs* (1), laquelle, ainsi qu'on devait s'y attendre après la lecture des travaux de M. Poincaré, joue un rôle essentiel dans tout ce qui va suivre.

Si la méthode employée est simple, par contre les résultats auxquels nous parviendrons sont compliqués, ou du moins, très différents de ceux que l'on est habitué à rencontrer. C'est cette complication même qui est instructive, en mettant en évidence ce qu'a d'exceptionnel la simplicité des discussions obtenues par l'intégration directe, dans les cas où elle est possible, et en montrant combien ces discussions simples donnent une idée fausse de ce qui se passe dans le cas général.

I. — Forme générale de la surface. Nappes infinies évasées et non évasées.

1. Les surfaces que nous considérerons seront supposées dépourvues de singularités à distance finie. Une telle surface est divisible en régions empiétant les unes sur les autres de manière que tout point de la surface soit intérieur au moins à l'une d'entre elles, et telles que les points d'une quelconque de ces régions aient leurs coordonnées cartésiennes exprimables à l'aide de deux paramètres α, β et cela *régulièrement*, c'est-à-dire par des fonctions continues et dérivables au moins jusqu'à un ordre déterminé, les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(y,z)}{D(\alpha,\beta)} \qquad \frac{D(z,x)}{D(\alpha,\beta)} \qquad \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$$

n'étant pas tous nuls. Cette dernière condition revient d'ailleurs à

(1) Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Brunel, que sa connaissance profonde de cette partie de la Science a mis à même de me fournir une aide précieuse, particulièrement en démontrant le théorème que j'invoque au n° 33.

celle-ci : qu'ayant mis l'élément linéaire sous la forme

$$E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2,$$

la quantité $EG - F^2$ doit être différente de zéro.

Aux paramètres α, β on peut d'ailleurs substituer d'autres paramètres α_1, β_1 donnés par les relations

$$(1) \qquad \alpha = \varphi(\alpha_1, \beta_1), \qquad \beta = \psi(\alpha_1, \beta_1),$$

pourvu que, dans la région considérée, les fonctions φ et ψ soient continues et dérivables, le déterminant fonctionnel de (α, β) par rapport à (α_1, β_1) étant différent de zéro : condition qui sera vérifiée si, en remplaçant α, β par leurs valeurs (1) dans l'élément linéaire, de manière que celui-ci prenne la forme

$$E_1\,d\alpha_1^2 \qquad F_1\,d\alpha_1 \qquad G_1$$

le nouveau discriminant $E_1G_1 - F_1^2$ est différent de zéro (puisqu'on a $\frac{E_1G_1 - F_1^2}{} = \left[\frac{D(\alpha,\beta)}{}\right]^2$).

Rappelons que, dans ces conditions, si $\alpha_1^{(0)}$, $\beta_1^{(0)}$ sont les valeurs de α_1, β_1, correspondant aux valeurs $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ de α, β, à tout système de valeurs α, β suffisamment voisines de $\alpha_1^{(0)}$, $\beta_1^{(0)}$ correspondra un système de valeurs de α_1, β_1 très voisin de $\alpha_1^{(0)}$, $\beta_1^{(0)}$ et *un seul*; de sorte que si l'on fait varier le point (α, β) continûment sur un chemin déterminé, compris tout entier dans la région, les quantités α_1, β_1 varieront aussi continûment et seront déterminées sans ambiguïté par cette condition, en un point quelconque de ce chemin (en supposant données leurs valeurs initiales); et si, de plus, α, β sont dérivables par rapport à la variable dont ils dépendent, il en sera de même de α_1, β_1.

2. Nous ne supposons pas, d'ailleurs, que nos surfaces soient algébriques ni même analytiques; toutefois nous ferons, chemin faisant, sur la forme générale de ces surfaces, des hypothèses simples qui sont toujours vérifiées sur les surfaces algébriques.

3. En outre, nos surfaces seront à courbure partout négative : les points de courbure nulle, s'il y en a, seront isolés et en nombre fini,

de sorte que l'on pourra prendre un nombre positif ε assez petit pour que, dans une portion limitée quelconque de la surface, la courbure soit partout plus petite (algébriquement) que $-\varepsilon$, à l'exception d'un certain nombre d'aires dont toutes les dimensions seront inférieures à une quantité donnée quelconque. On verra, d'ailleurs, aisément que nos théorèmes fondamentaux subsistent dans des conditions un peu plus générales; il peut exister certaines lignes de courbure nulle ou même des régions où la courbure est positive, pourvu que ces régions soient suffisamment restreintes et que la courbure y soit suffisamment petite.

4. A l'inverse des surfaces à courbure positive et non infiniment petite, lesquelles sont toujours fermées, les surfaces dont il est question actuellement ont nécessairement des nappes infinies. Cette proposition s'établit immédiatement en remarquant que si la coordonnée x, par exemple, avait un maximum ou un minimum en un point de la surface, la courbure en ce point serait positive [1].

5. Plus généralement, on voit que, pour une portion limitée quelconque S' de la surface, le maximum et le minimum de la distance à un plan déterminé quelconque ont lieu sur les contours limites, de sorte qu'un plan ne peut couper S' sans couper ceux-ci.

Cette remarque, qui présente une certaine analogie avec les faits qui se rencontrent dans la théorie des fonctions harmoniques, paraît imposer à la forme des surfaces à courbures opposées, des lois assez précises. Nous aurons à l'utiliser un peu plus loin.

6. Il est intéressant de remarquer que l'existence de nappes infinies peut également s'établir en partant de la relation de Gauss-Bonnet

Rapportons à cet effet la sphère de rayon 1 à un système de méri-

[1] Le raisonnement semble être mis en défaut par les points de courbure nulle. Il est aisé de voir que le maximum ou le minimum ne peuvent avoir lieu même en ces points, du moins qu'ils sont isolés.

diens et de parallèles de pôles a, a' (ces pôles n'ayant point de situation exceptionnelle par rapport à la représentation sphérique de la surface considérée); si nous entourons les points a, a' de deux parallèles infiniment petits s, s', ces parallèles serviront de représentation sphérique à un certain nombre de courbes très petites S_1, S_2, ..., S_n, entourant autant de points A_1, A_2, ..., A_n de la surface donnée; soit Σ ce qui reste de la surface donnée quand on enlève les petites aires intérieures aux courbes S_1, S_2, ..., S_n. En tout point de Σ, nous prendrons, suivant la méthode de M. Darboux, un trièdre attaché à la surface, en lui donnant pour axe des x la tangente correspondant à la tangente parallèle au parallèle sphérique, c'est-à-dire la conjuguée de la tangente parallèle à la tangente (T) au méridien sphérique. Si la courbure est partout négative et non nulle, nous aurons ainsi un trièdre mobile vérifiant, sur toute la surface Σ, les conditions moyennant lesquelles a lieu la relation (2). Or, en appliquant celle-ci à l'aire Σ, nous devrons faire d'abord $\int d\omega = 0$, sur tous les contours limites, puisque la tangente en chaque point de ceux-ci est l'axe des x du trièdre correspondant. D'autre part, l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$, prise le long d'un contour infiniment petit tel que S_i, considéré comme limitant l'aire Σ, est approximativement égale à l'intégrale $-\int \frac{ds}{\rho}$ étendue à la projection d'une aire infiniment petite sur son plan tangent, c'est-à-dire à -2π. L'équation (2), où le premier membre est positif et le second négatif, met alors en évidence la contradiction.

7. Relativement aux nappes infinies dont nous venons de constater l'existence, nous allons faire une des hypothèses que nous avons annoncées au n° 2.

Soit encore S' une partie finie de la surface, limitée par certaines courbes fermées C_1, C_2, ..., C_n. *Nous supposerons que, si ces courbes ont été convenablement choisies, on peut les faire varier continûment de manière à les éloigner toutes à l'infini* (par conséquent à faire tendre S' vers la surface entière S), *sans que, dans cette variation, la surface* S' *cesse de rester identique à elle-même, au point de vue de la Géométrie de situation.*

Il est clair que, dans ces conditions, ce qui reste de S après enlève-

ment de S′, se compose (du moins si les courbes C ont été convenablement choisies) de n parties infinies indépendantes entre elles, les *nappes* infinies, chacune de ces nappes étant limitée par une des courbes C et pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement de cette courbe lorsque, partant de sa position initiale, elle s'éloigne à l'infini.

Moyennant l'hypothèse précédente, nous pourrons appliquer à notre surface l'*Analysis situs* ordinaire, les propriétés topologiques de S étant, *par définition*, celles de la surface S′ à un moment quelconque de sa variation.

8. En particulier, une nappe infinie devra être considérée, au point de vue topologique, comme limitée, d'une part par la courbe C correspondante dans sa position première; d'autre part, par cette même courbe dans une position très éloignée. Nous noterons ce fait, essentiel pour la suite, qu'une telle aire a son ordre de connexion égal à 2. Elle équivaut, pour la Géométrie de situation, à une couronne circulaire.

On voit, de plus, qu'*à chaque nappe infinie correspond un bord de la surface* (1).

On connaît certaines surfaces à courbures opposées pour lesquelles l'hypothèse du n° 7 n'est pas vérifiée. Telle est, par exemple, la surface minimum de Neovius (2), qui présente une infinité de trous équidistants les uns des autres dans trois directions rectangulaires. Nous écarterons de telles surfaces, auxquelles, d'ailleurs, la théorie qui va suivre pourrait sans doute se généraliser sans trop de difficulté.

9. La représentation sphérique de S se composera en général de plusieurs feuillets. Elle sera topologiquement équivalente à S si celle-ci est à deux côtés, puisqu'il y aura entre elles correspondance univoque.

La courbure gardant un signe invariable, les feuillets (ainsi que

---

(1) Il est bien entendu que nous n'établissons aucune connexion entre deux nappes infinies qui se rejoindraient si l'on ramenait le plan de l'infini à distance finie par une transformation homographique. Ainsi, à notre point de vue, la surface gauche de révolution sera dite avoir *deux* nappes infinies.

(2) Helsingfors, 1883.

cela arrivait déjà dans le cas de la courbure positive) ne se raccorderont par aucun pli ni aucun autre mode de connexion, tel que les aires changent de sens quand on passe d'un feuillet à l'autre. Ils ne présenteront même aucun raccordement ni aucune autre singularité tant que la courbure sera négative. Il n'en sera pas de même si la courbure s'annule en certains points particuliers : par exemple, si en un point O (supposé, bien entendu, non singulier sur la surface), les deux courbures s'annulent, il est aisé de voir qu'à ce point correspond, pour la représentation sphérique, une ramification riemanienne.

10. A chaque bord C de la surface limitée S′ correspondra un bord c de la représentation sphérique. Mais il y a plus : si le nombre des feuillets de cette représentation sphérique est fini (ce qui lui assigne une aire finie), elle a un bord bien déterminé correspondant à chaque nappe infinie de la surface *illimitée* S. Car, puisque le signe de la courbure est invariable, si la courbe C va toujours en s'éloignant, l'aire limitée par c ira toujours en s'étendant : cette courbe coupera donc une ligne quelconque en des points qui se déplaceront dans un sens invariable sans pouvoir s'éloigner indéfiniment. Elle tendra, par conséquent, vers une courbe limite β.

Celle-ci peut d'ailleurs fort bien se réduire à un point : c'est ce qui arrive, par exemple, pour une surface de révolution dont la méridienne a une direction asymptotique perpendiculaire à l'axe.

L'aire sphérique délimitée par la courbe c ayant une limite, il en est de même pour l'intégrale

étendue à la courbe C, sur la surface donnée.

11. On obtient des relations dont l'étude présenterait peut-être quelque intérêt en prenant pour direction de l'axe des x du trièdre mobile, considéré au n° 6, la direction de la tangente (T) au méridien sphérique et non la direction conjuguée. Rien ne sera changé dans les diverses quantités qui figurent dans la relation (2), à l'exception de l'angle ω qui est changé en un autre angle ω_1. Si l'on retranche membre à membre la nouvelle relation ainsi obtenue de la primitive,

il vient

$$(3) \qquad \int d(\omega - \omega_1) = 0,$$

l'intégrale étant étendue, d'une part aux contours infiniment petits $S_1, S_2, \ldots, S_n$, dont il a été question au n° 6, d'autre part aux nappes infinies.

Cette équation ne contient évidemment que des nombres entiers, chaque intégrale étant un multiple de 2π, puisqu'elle exprime la variation de l'angle que fait la tangente (T) avec sa conjuguée.

Le long de chaque contour S_i, cette variation est égale à -4π, puisque la tangente à ce contour tourne de -2π et que la tangente (T) tourne en sens contraire de la première.

On voit que la conclusion serait toute différente si, au point A_i, la courbure était positive. Alors, en effet, les deux tangentes tourneraient dans le même sens et la variation serait nulle. Si donc on appliquait la formule (3) à une surface à courbure de signe variable, il n'y aurait à tenir compte que des contours S_i tracés autour de points où la courbure est négative. Mais, par contre, il conviendrait d'ajouter des termes correspondant à certains points de courbure nulle, ceux pour lesquels la direction de courbure nulle est parallèle à (T). On constate aisément que les points paraboliques doivent être divisés en deux classes et qu'à chaque point où une direction de courbure nulle est parallèle à (T) correspond, dans le premier membre de la formule (3), le terme $\pm 2\pi$, suivant la classe à laquelle appartient ce point.

Des termes additionnels doivent également être introduits dans la formule si la représentation sphérique présente les singularités indiquées au n° 9.

12. Les remarques des n^{os} 9-11 ne nous seront pas nécessaires au point de vue de la théorie des lignes géodésiques. Il n'en est pas de même d'une distinction essentielle qu'il nous reste à établir relativement à la forme des nappes infinies.

Considérons encore une telle nappe comme engendrée par le déplacement d'une courbe mobile C. En général, quelle que soit la loi de variation de cette courbe sur la surface, sa longueur totale augmentera indéfiniment à mesure qu'elle s'éloignera. C'est ce qui

a lieu pour les nappes infinies du paraboloïde hyperbolique, de l'hyperboloïde à une nappe, de l'alysséide, etc. De telles nappes infinies seront dites *évasées*.

Au contraire, nous nommerons nappes *non évasées* celles sur lesquelles on peut faire occuper à la courbe C une série de positions de plus en plus éloignées dans chacune desquelles son périmètre reste inférieur à une limite déterminée ([1]). Telle est, par exemple, une surface de révolution dont la méridienne a une asymptote parallèle à l'axe.

13. Dans l'exemple précédent, on voit qu'il existe une direction asymptotique. La remarque fondamentale du n° 5 va nous permettre de montrer qu'il y a là un fait général.

Soit, en effet, C_0 la position primitive de la courbe C,

$$C_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

la même courbe dans une série de positions, très éloignées pour ν très grand, telles que les longueurs des courbes C_ν soient toutes inférieures à une même quantité donnée.

Plus généralement, il nous suffira de supposer que l'angle maximum sous lequel une courbe C_ν est vue de l'origine soit nul pour ν infini. Dans ces conditions, en effet, il existera au moins une direction δ telle que la droite joignant l'origine à un point quelconque de C_ν fasse avec δ un angle plus petit qu'un angle quelconque donné η, et cela pour une infinité de valeurs (convenablement choisies) de ν, valeurs que nous considérerons à l'exclusion des autres. Mettons que cette direction soit la verticale ascendante.

Soit Γ un cylindre vertical convexe qui contient C_0 à son intérieur; nous le limiterons par une section droite qui laisse C_0 en dessus et nous ferons tourner chaque plan tangent au cylindre, autour de son intersection avec le plan de section, d'un angle très petit ε, vers l'extérieur. La courbe C_0 sera du même côté que Γ par rapport

([1]) Cette série de positions n'est pas nécessairement continue : nous n'excluons pas l'hypothèse où la courbe C, dans son mouvement, aurait tantôt une longueur très grande et tantôt une longueur finie. Il apparaîtra que cette hypothèse est inadmissible.

à chacun des plans ainsi obtenus, et il en sera de même de la courbe C_ν pour $\eta > \varepsilon$. Donc la nappe infinie est d'un seul côté d'un quelconque de ces plans et, comme ceci a lieu quelque petit que soit ε, toute la nappe infinie est intérieure à Γ : δ est donc une direction asymptotique. On peut même ajouter que les cylindres verticaux convexes, circonscrits aux positions successives de la courbe C, sont tous intérieurs les uns aux autres, de sorte qu'ils tendent vers une position limite.

En particulier, si les projections horizontales des C_ν sont des courbes convexes, il y a un cylindre asymptote. Il est probable que le même résultat doit pouvoir se démontrer lorsque ces projections présentent des arcs concaves.

14. Il en est de même pour une propriété voisine, mais qui concerne le plan tangent.

Soient (C) une section horizontale de la nappe infinie non évasée, M un point de (C) situé sur le contour convexe de la courbe, c'est-à-dire tel que la tangente (t) en ce point laisse toute la courbe d'un seul côté que nous appellerons, pour abréger, le *côté intérieur*.

Le plan vertical V qui projette horizontalement (t) coupera nécessairement C_0 (puisque le point M est intérieur à tout cylindre vertical convexe contenant cette courbe), et la tangente (t) divise ce plan en deux demi-plans, l'un V' inférieur, l'autre V'' supérieur. Nous ferons tourner le demi-plan V' autour de (t), vers l'extérieur, d'un angle tel qu'il vienne à toucher C_0 et le plus grand possible d'ailleurs : cet angle sera évidemment très petit si la courbe (C) a été prise très éloignée. Le plan P ainsi obtenu laisse d'un seul et même côté les courbes (C) et C_0 et par suite aussi toute la portion de surface comprise entre elles. Donc le demi-plan tangent inférieur en M [nous voulons dire la portion du plan tangent en M située au-dessous de (t)] est, par rapport à P, du côté intérieur.

Mais, d'autre part, le demi-plan tangent supérieur est, comme nous le savons, à l'intérieur de V''.

Donc le demi-plan tangent inférieur est compris dans le dièdre $V'P$ et, par conséquent, *l'angle de ce plan avec la verticale tend vers zéro.*

Il ne paraît pas douteux que ce fait ne subsiste même lorsqu'on choisit le point M sur une partie rentrante de (C). En tout cas,

nous pouvons admettre qu'il en est ainsi; cette hypothèse est une de celles que nous nous sommes réservé le droit de faire, puisque, sur une surface algébrique, l'angle du plan tangent avec la droite qui joint l'origine au point de contact tend vers zéro.

Le bord de la représentation sphérique, correspondant à une nappe infinie non évasée, se compose d'un grand cercle ou d'une série d'arcs appartenant à un même grand cercle.

15. Il résulte de là que la limite vers laquelle tend (n° 10) l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ prise le long de la courbe C, lorsque celle-ci s'éloigne indéfiniment, est nulle.

Pour le voir, on prendra comme courbes C les sections horizontales. Dans l'expression $\frac{ds}{\rho_g} = \frac{ds}{\rho} \sin \varpi$ (1), l'angle ϖ, compris entre la normale en un point M de C et le plan horizontal, n'est autre que la hauteur (au sens astronomique du mot) de la représentation sphérique m de M, pendant que le facteur $\frac{ds}{\rho}$ est égal à l'angle élémentaire dont tourne la tangente horizontale à la surface, c'est-à-dire à la variation élémentaire de l'azimut θ du point m.

L'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ est donc égale à $\int \sin \varpi \, d\theta$, c'est-à-dire à l'aire comprise entre la courbe c et le grand cercle horizontal, aire qui est infiniment petite dans les conditions actuelles.

Les nappes non évasées se présentent dans la théorie actuelle comme un cas singulier, une sorte de cas limite offrant des particularités et des difficultés analogues à celles qu'introduisent les racines multiples de l'équation caractéristique dans la réduction des substitutions linéaires. En raison de ce fait que la limite de $\int \frac{ds}{\rho_g}$ est nulle, on doit les considérer comme ayant une géodésique fermée rejetée à l'infini.

16. La nature de la surface, au point de vue de la Géométrie de situation, dépend, comme on sait, du nombre des bords (c'est-à-dire,

(1) Darboux, *Leçons*, Livre V.

pour nous, des nappes infinies) et du nombre des *trous*, caractérisés par les contours fermés qu'on peut tracer sur elles sans la démembrer.

Les surfaces à courbures opposées généralement connues ont toutes leur ordre de connexion égal à 1 (paraboloïde hyperbolique) ou à 2 (hyperboloïde à une nappe).

Mais on peut former des surfaces à courbures opposées ayant un nombre quelconque de nappes infinies. Telles sont, entre autres, les surfaces représentées par des équations du type

$$ {}_1\delta_2 \ldots \delta_m \tag{4}$$

où (k étant une constante) les quantités $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$; $\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ sont les distances du point (x, y), projection d'un point quelconque de l'espace sur un plan horizontal pris comme l'un des plans coordonnés, à autant de points fixes P_1, P_2. .... P_m; P'_1, P'_2, P'_n de ce plan. Cette surface est à courbures partout opposées, car le second membre est la partie réelle d'une fonction de la variable complexe $x + iy$; elle a d'ailleurs $m + n + 1$ nappes infinies, dont m dirigées du côté des z positifs, n du côté des z négatifs, et une s'étalant dans le sens horizontal. Par exemple, la surface

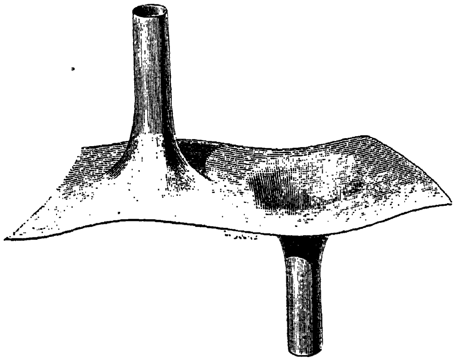
$$ \text{og}\, \frac{\delta}{\delta'}; \tag{4'}$$

correspondant à $m = n = 1$, a la forme générale représentée par la figure 1. Elle possède un plan de symétrie, le plan vertical mené par PP'; un axe de symétrie, la perpendiculaire au milieu de PP' et un centre de symétrie. A ce dernier point correspond, sur la sphère, un point O qui est une ramification riemanienne de la représentation sphérique (9); effectivement, celle-ci se compose de deux feuillets correspondant aux deux moitiés de la surface, séparées l'une de l'autre par l'axe de symétrie et qui se croisent suivant l'arc de grand cercle qui va du pôle supérieur au point O; elle présente trois bords, l'un (correspondant à la nappe horizontale) constitué par un contour infiniment petit tournant deux fois autour du pôle supérieur, les deux autres tracés, dans chacun des feuillets, suivant le grand cercle horizontal.

Les nappes infinies verticales ne sont pas évasées; si l'on désirait

qu'elles le devinssent, il suffirait d'augmenter le rayon de chaque section horizontale d'une quantité proportionnelle à z^p (p étant un nombre impair) sans changer le centre de cette section. La même opération pourrait s'appliquer à la surface plus générale (4); les

Fig. 1.



nappes situées d'un même côté du plan horizontal se rencontreraient; mais ceci ne constitue pas une singularité de nature à empêcher nos raisonnements d'être valables : il suffira de regarder comme entièrement indépendantes l'une de l'autre les nappes qui se croisent.

17. Un cas limite de la surface (4′) est évidemment la suivante :

(5) $$\frac{kx}{[illegible]^2 + y^2} = \text{partie réelle de } \frac{k}{x + [illegible]}$$

Mais cette dernière peut être envisagée à un point de vue tout différent : son équation résulte, en effet, de l'élimination de u entre les relations

(6) $$[illegible]^2 + y^2 = u [illegible]$$

(7) $$k \; [illegible]$$

dont la première (x, y, u étant comme des coordonnées cartésiennes) représente un cône, c'est-à-dire une surface de courbure nulle. Ceci conduit à envisager, plus généralement, la surface résultant de

l'élimination de u entre les relations

$$u = f(x, y),$$

(9) $$z = \varphi(u).$$

Si l'on désigne, comme d'ordinaire, par p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de z, par p', q', r', s', t' les dérivées correspondantes de u, il vient aisément

$$rt - s^2 = \text{[illegible]} {}^2 - 2s'p'q' + \text{[illegible]}$$

par conséquent on voit que la surface considérée est à courbure négative, si : 1° la surface (8) est à courbure nulle ou négative; 2° la courbe plane représentée par l'équation $u =$ const. tourne partout sa concavité du côté des u croissants ou du côté des u décroissants, suivant que la fonction φ' est elle-même croissante ou décroissante en valeur absolue, c'est-à-dire suivant que la courbe représentée (en coordonnées rectilignes z et u) par l'équation (9) tourne sa concavité du côté des u négatifs ou du côté des u positifs.

Si, par exemple, la fonction $u = f(x, y)$ est celle qui est définie par l'équation (6), les courbes $u =$ const. tournent leur concavité vers les u décroissants en valeur absolue. Il suffira donc que l'équation (9) représente une courbe tournant partout sa convexité vers l'axe $u = 0$; nous pourrons, par exemple, d'une infinité de manières, prendre

$$\text{[illegible]} \mathrm{R} \text{[illegible]}$$

R étant une fraction rationnelle convenablement choisie. La surface algébrique ainsi obtenue aura autant de nappes infinies que la fonction R a de discontinuités, plus deux; et toutes ces nappes seront évasées si cette fonction devient infinie en même temps que z.

La surface aura, il est vrai, une ligne de courbure nulle. On fera disparaître cet inconvénient en déplaçant chaque section $z =$ const. parallèlement à l'axe des x, d'une quantité égale à une fonction convenablement choisie de z.

18. Nous venons d'obtenir des surfaces à courbure négative présentant un nombre quelconque de nappes infinies; le procédé suivant va nous fournir, au contraire, des surfaces offrant un nombre plus ou moins grand de trous.

Soient $U = 0$, $V = 0$ les équations de deux surfaces à courbures opposées. L'équation

(10)

représente une surface composée de deux surfaces partielles, l'une située dans la région $U > 0$, $V > 0$; l'autre dans la région $U < 0$, $V < 0$. Comme nous n'avons à nous occuper ici que de surfaces connexes, nous ne considérerons qu'une seule de ces deux surfaces partielles : la première, par exemple, et même une partie connexe de cette première. Nous aurons ainsi une surface qui sera évidemment à courbures opposées en tout point situé à distance finie et non dans le voisinage d'une courbe d'intersection des deux surfaces primitives, et que l'on pourra même supposer à courbures opposées à l'infini en prenant, au besoin, pour ε, non pas une constante, mais une fonction toujours positive et diminuant plus ou moins rapidement lorsque x, y, z augmentent; par exemple

η étant une constante très petite.

Pareillement, si les surfaces $U = 0$, $V = 0$ ont des points de courbure nulle, on fera figurer dans ε ou dans η un facteur s'annulant en ces points ainsi que ses dérivées, jusqu'à un ordre convenable.

Reste le voisinage d'une courbe d'intersection des deux surfaces primitives. On constate aisément que la courbure de la surface (10) reste négative même aux environs d'une telle courbe, si celle-ci tourne sa convexité vers la région $U > 0$, $V > 0$, c'est-à-dire si sa tangente passe dans cette région.

Considérons, par exemple, les deux hyperboloïdes

$(x - \alpha)^2$

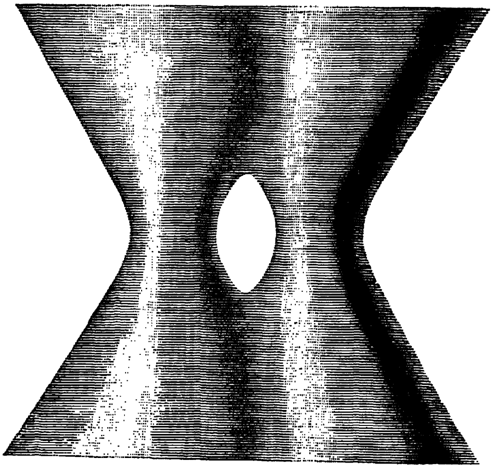
$V =$

qui se coupent suivant une hyperbole. La partie de la surface $UV = \varepsilon$ située dans la région $U > 0$, $V > 0$ est à courbure négative. Sa

forme générale est représentée figure 2; elle a deux nappes infinies et un trou.

En associant de même un nombre quelconque d'hyperboloïdes égaux ayant un axe transverse suivant une même droite, on aurait une surface à un nombre quelconque de trous, avec deux nappes infinies.

Fig. 2.



On obtient un résultat analogue en associant la surface

[cas particulier de la surface (4)] avec sa symétrique par rapport à un plan parallèle au plan des xy et de z positif. On a ainsi deux nappes infinies et $m - 1$ trous.

Enfin, on peut obtenir un nombre plus élevé de nappes infinies, jointes à des trous, en combinant la surface

avec ses symétriques successives par rapport à un certain nombre de plans parallèles.

19. On obtient encore une surface à courbures opposées et à plus de deux nappes infinies en partant, comme l'indique M. Brunel ([1]), de l'hyperboloïde de révolution à une nappe, coupant cette surface par les différents plans qui passent par un diamètre déterminé Oy du cercle de gorge et faisant tourner chaque section, autour de Oy, d'un angle égal à la moitié de l'angle φ que fait son plan primitif avec le plan équatorial.

Plus généralement, au lieu de diminuer l'angle que fait une section quelconque avec le plan équatorial dans le rapport de 1 à 2, on peut diminuer ce même angle dans le rapport de 1 à p (p entier); la nouvelle surface ainsi obtenue est représentée paramétriquement, en fonction de φ et d'un rayon vecteur ρ, par les formules

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi, \\ y^2 &= a^2 + \rho^2 \cos 2p\varphi, \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent sera

$$(dx \sin\varphi + dz \cos\varphi) \cos 2p\varphi + p(dz \sin\varphi - dx \cos\varphi) \sin 2p\varphi - \frac{y\,dy}{\rho} = 0,$$

et les quantités D, D′, D″ de Gauss ([2]) pourront être prises égales à

$$\mathrm{D} = - \frac{\cos 2p\varphi}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^2}{y^2} \cos 2p \ldots\right.$$

$$\mathrm{D}' = p \sin 2p\varphi\left(1 - \frac{\rho^2}{y^2} \cos 2p\varphi\right) = \frac{a^2 p \sin 2p\varphi}{y^2},$$

$$\ldots \cos 2p\varphi(2p^2 - 1) + \frac{p^2\rho^2}{y^2} \sin^2 2p\varphi \Big];$$

d'où

$$\mathrm{DD}'' \ldots \frac{a^2}{y^2} \ldots$$

$$\ldots \frac{p^2\rho}{y^2} \cos 2p\varphi \sin^2 2p\varphi \ldots \frac{\ldots}{y^2} \sin^2 \ldots$$

$$\ldots \frac{a^2}{y^2}[p^2 \sin^2 2p\varphi + (2p^2 - 1) \cos^2 2p\varphi].$$

([1]) *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 4 mars 1897.

([2]) *Leçons sur la Théorie des surfaces*, Livre V, Chapitre II, et Livre VII, Chapitre III.

La surface est donc à courbures partout opposées. Elle admet comme seuls points singuliers (à distance finie) les points $x = z = 0$, $y = \pm a$; mais, ainsi qu'on s'en assurera sans difficulté, ces singularités ne sont point de nature à empêcher la validité des raisonnements qui vont suivre. Enfin, cette surface possède $2p$ nappes infinies.

II. — Considérations d'Analysis situs.

20. Ayant reconnu, dans les numéros précédents, l'existence de surfaces à courbures opposées et à connexion quelconque, nous avons à rappeler les principes qui gouvernent l'étude des lignes tracées sur de telles surfaces : principes posés par M. Jordan dans un Mémoire bien connu (¹).

Nous dirons que deux contours fermés tracés sur la surface appartiennent à la même *espèce* s'ils sont réductibles l'un à l'autre par une déformation continue, effectuée sur cette surface.

L'énumération des différentes espèces de contours fermés repose sur la considération des *contours élémentaires*. Ceux-ci sont de deux sortes :

1° Ceux qui équivalent respectivement aux différents bords de la surface;

2° Ceux qui correspondent par paires aux différents trous (s'il en existe).

Les premiers joueront, à notre point de vue, un rôle spécial. Nous les désignerons sous le nom de *contours simples*.

On sait que, dans beaucoup de questions, le choix des contours élémentaires comporte un certain degré d'arbitraire, ces contours pouvant être remplacés par d'autres en nombre égal, tels que chacun des deux systèmes puisse se déduire de l'autre. Il en sera encore de même ici, mais non pas pour ce qui concerne les contours simples. Il reste entendu que chacun de ceux-ci équivaut à un bord déterminé (correspondant à une nappe infinie déterminée) de la surface.

(¹) Ce *Journal*, année 1866. Comme le fait M. Jordan, nous supposerons, pour simplifier, nos surfaces à deux côtés.

Un contour quelconque est réductible à une suite de contours élémentaires parcourus dans des sens déterminés et dans un ordre déterminé, autrement dit représentable par un symbole (produit) de la forme

(11) $$ABC\ldots,$$

chacune des lettres (facteurs) A, B, C, ... étant le symbole C_i d'un contour élémentaire ou le symbole C_i^{-1} d'un contour C_i décrit en sens inverse, et ces symboles étant ou non distincts les uns des autres : expression qui peut encore s'écrire

(12) $$C_i^m C_{i'}^{m'} C_{i''}^{m''} \ldots,$$

chaque indice étant, cette fois, distinct du précédent et du suivant et les exposants m, m', ... étant des entiers positifs ou négatifs, mais qu'on peut supposer non nuls (sauf dans le cas où l'espèce considérée est celle des contours réductibles à un point).

Le symbole C^m (C étant un contour quelconque), qui représente le contour C décrit m fois dans un sens déterminé si m est positif et ce même contour décrit $|m|$ fois en sens inverse si m est négatif, sera dit correspondre à un *multiple* de C.

21. Les contours élémentaires ne sont pas tous indépendants. Il existe entre eux une relation, et une seule, qui permet de regarder l'un quelconque des contours élémentaires comme une combinaison des autres et, par conséquent, de l'éliminer de l'une quelconque des expressions (11) ou (12).

C'est ainsi que, dans le cas de la connexion simple, il n'y a aucun contour non réductible à un point ; et que, sur une surface à connexion double, les contours élémentaires se réduisent à un seul.

Mais, une fois l'un des contours éliminé comme il vient d'être dit, *l'expression* (12) *est parfaitement déterminée à une permutation circulaire près.*

22. Il nous arrivera, dans certains cas, de ne pas considérer comme essentiellement distincts d'un contour déterminé ses différents multiples. A ce point de vue, une surface à connexion double n'aurait, comme on le voit, qu'une seule espèce de contours non réductibles.

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse deux, *les contours essentiellement distincts les uns des autres sont en nombre infini.*

Par contre, *il n'y a qu'un nombre fini d'espèces de contours dont la longueur soit inférieure à une longueur donnée quelconque.*

23. Soient maintenant a, b deux points quelconques de la surface.

Nous dirons que deux chemins qui vont de a en b appartiennent au même *type* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue dans laquelle les points a, b restent fixes.

Nous employons le mot *type* au lieu du mot *espèce*, qui nous a servi pour les contours fermés, afin d'éviter certaines confusions, en particulier dans la circonstance suivante :

Supposons que le point b coïncide avec le point a. Les chemins que nous aurons alors à comparer seront des contours fermés partant du point a et y aboutissant.

Or, une infinité de ces chemins peuvent être de même *espèce*, lorsqu'on les considère comme contours fermés, tout en étant de *types* différents, si on les considère comme lignes joignant le point a à lui-même.

La déformation continue par laquelle on passe d'un de ces chemins à l'autre peut, en effet, être telle que le point a ne puisse rester fixe pendant cette déformation, mais décrive forcément un contour non réductible à un point [1].

24. Les différents types de chemins joignant entre eux deux points (différents ou non) a et b se représentent par des symboles de la forme (11) ou (12); mais ces symboles se distinguent de ceux qui servent aux contours ouverts par cette circonstance que la permutation circulaire des facteurs n'y est pas légitime. Cette différence met bien en évidence le fait que nous venons de signaler au numéro précédent.

25. Il y a une infinité de types de chemins joignant deux points (du moins sur une surface à connexion multiple); mais, *les types*

[1] Cette remarque ne s'applique pas au cas où l'espèce en question est celle des contours réductibles à un point.

auxquels correspondent des chemins de longueur finie sont en nombre fini.

26. Donnons-nous enfin, sur la surface, un point a et une ligne L. Nous dirons que deux chemins ab, ac, qui partent du point a pour aboutir à la ligne L, sont du même type, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue dans laquelle l'extrémité a reste fixe, pendant que l'autre extrémité décrit la ligne L. Cela revient manifestement à dire que le deuxième chemin ac forme, avec l'arc cb de la ligne L, une ligne allant de a en b et du même type que le premier chemin ab. La notion que nous venons d'introduire n'offre donc rien d'essentiellement nouveau : on représentera un type de chemin allant de a à la ligne L par le symbole d'un type de chemin allant de a à un point déterminé b de L.

Il y a toutefois une remarque importante à faire lorsque la ligne L est fermée. Dans ce cas, en effet, il existe une infinité de manières différentes d'aller du point b à un autre point c de cette ligne sans la quitter. Si cette ligne est réductible à un point, tous les arcs ainsi obtenus sont équivalents. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas général et l'on voit qu'*on ne doit pas considérer le type comme modifié si l'on fait suivre son symbole du symbole de* L (pris en traitant L comme une ligne joignant le point b à lui-même) *ou d'un de ses multiples.*

27. En particulier, *sur une surface à connexion double tous les chemins qui vont d'un point donné à une ligne fermée donnée (sans point double) sont réductibles les uns aux autres.*

28. Supposons que le point a se déplace sur une ligne déterminée L' aboutissant en un point a'. A chaque type de chemins allant de a à L correspondra évidemment un type déterminé de lignes joignant a' à L, type qui dérivera du premier par continuité.

Si la ligne L' est fermée, de manière que le point a' coïncide avec a, rien ne permet d'affirmer que le type ainsi dérivé coïncidera avec le type primitif. Cette circonstance se produira toutefois dans deux cas :

1° Si la ligne fermée L' est réductible à un point;

2° Si cette ligne est de même espèce que L, le type considéré étant celui du chemin que suit le point a lorsque L′ vient, par une déformation continue, coïncider avec L.

III. — Théorèmes fondamentaux. Lignes géodésiques fermées.

29. Une géodésique de la surface est bien déterminée par un de ses *éléments*, c'est-à-dire par un point M (dont les coordonnées curvilignes sont α, β) et l'angle ω que fait la tangente en ce point avec l'axe des x du trièdre (T) attaché à la surface en ce point; α, β et ω seront dits les *coordonnées de l'élément*. Nous pourrons supposer que, dans une région déterminée où nous ferons varier cet élément, la surface soit représentée régulièrement à l'aide des coordonnées α, β et que la position du trièdre (T) y varie continûment.

Dès lors si, sur la géodésique considérée, nous portons, à partir du point M, une longueur MM′ $= u$, les coordonnées de l'élément situé en M′ (lesquelles ne seront pas nécessairement rapportées au même système que celles du point M) seront des fonctions de α, β, ω, u : fonctions continues et dérivables, au moins jusqu'à un certain ordre.

Supposons que le point M varie sur une ligne déterminée L, les coordonnées de ce point étant des fonctions d'un paramètre v, et que la géodésique issue de ce point soit constamment orthogonale à L. Les coordonnées, curvilignes ou cartésiennes, du point M′ seront des fonctions continues et dérivables de u et de v; à des variations infiniment petites de ces quantités correspondra pour M′ un déplacement infiniment petit de longueur

$$ds = \sqrt{du^2 + C^2\, dv^2},$$

C étant encore une fonction dérivable de u et de v. On sait que cette quantité est liée à la courbure $K = \frac{1}{RR'}$ de la surface par l'équation

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -CK. \tag{3}$$

Cette dernière entraîne une conséquence fondamentale pour notre objet. Sur les surfaces à courbures opposées, en supposant (ainsi

qu'on peut le faire) C positif, il vient

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} \geqq 0. \tag{14}$$

30. Les quantités u, v sont-elles, à leur tour, au moins dans une région suffisamment petite, déterminées par la position du point M' ? Autrement dit, toute variation infiniment petite du premier ordre de ces quantités entraîne-t-elle un déplacement, infiniment petit du premier ordre, de ce point ? Les principes rappelés au n° 1 montrent qu'il en sera nécessairement ainsi toutes les fois que C sera différent de zéro. La région de la surface qui entoure le point M' sera alors représentée régulièrement par les coordonnées u, v : celles-ci pourront être considérées comme variant continûment lorsque le point M' se déplacera continûment en décrivant un chemin quelconque et seront déterminées sans ambiguïté par cette condition.

31. Supposons, en premier lieu, que la ligne L se réduise à un point a : v sera l'angle que fait, avec l'axe des x du trièdre attaché à la surface en a, une géodésique issue de ce point; u, qui sera essentiellement positif, représentera un arc porté, à partir du point a, sur cette ligne (coordonnées polaires géodésiques). On aura, en a,

$$C = \quad \partial C$$

donc, pour toute autre valeur de u,

$$\frac{\partial C}{\partial u} \tag{15}$$

(16)

Voilà donc un cas où la condition $C \neq 0$ est nécessairement vérifiée et nous pouvons dès lors établir notre premier théorème fondamental.

Théorème. — *A chaque type de lignes joignant deux points a et b, correspond un arc de géodésique appartenant à ce type, et il n'en correspond qu'un seul* ([1]).

La proposition d'après laquelle, *sur une surface à courbure négative, deux géodé-*

1° Considérons un point m qui va de a en b par une ligne quelconque Λ appartenant au type donné. Dans toutes les positions successives de ce point, la géodésique am sera déterminée sans ambiguïté par la double condition de varier continûment et d'avoir une longueur infiniment petite lorsque le point m est infiniment voisin de a.

Le point m venant en b, on obtient la géodésique cherchée.

2° Observons que toute géodésique répondant à la question peut s'obtenir par le procédé qui vient d'être expliqué; il suffira évidemment, à cet effet, de prendre pour la ligne Λ cette géodésique elle-même.

Or, les valeurs que prennent les coordonnées u, v du point m, quand ce point vient en b, varient continûment lorsqu'on déforme continûment la ligne Λ; elles ne changent donc en aucune façon, car le point b ne peut avoir, relativement au point a, plusieurs systèmes de coordonnées polaires géodésiques infiniment voisins les uns des autres.

32. La première partie de la proposition précédente serait évidente si l'on admettait que la longueur d'un chemin joignant ab et appartenant au type donné a nécessairement un minimum.

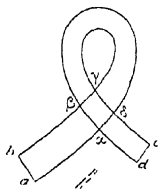
Quant à la seconde, il est à observer qu'on pourrait la démontrer en employant le théorème de Gauss sur les polygones géodésiques, moyennant certaines précautions nécessaires pour l'application de ce théorème aux contours géodésiques qui présentent des points doubles.

Considérons, par exemple, le polygone $abcd$ représenté figure 3. Il est clair qu'un tel polygone peut être considéré comme une somme

siques infiniment voisines ne peuvent se couper deux fois, proposition énoncée par Jacobi (*Vorles. über Dynamik*), a été démontrée par plusieurs géomètres. *Voir* à ce sujet le Mémoire de M. VON MANGOLDT (*Journal de Crelle*, t. 91, 1881, p. 23). M. Von Mangoldt donne, d'après MM. Thomson et Tait, la démonstration, à l'aide du théorème de Gauss, de ce fait que, si la surface est à connexion simple, deux géodésiques qui se coupent sous un angle fini ne peuvent pas non plus se couper à nouveau; il remarque (p. 28) que cette conclusion n'est pas nécessairement exacte s'il y a connexion multiple.

de polygones géodésiques ordinaires et que le théorème de Gauss peut lui être appliqué sans aucune difficulté, sous la simple condition de compter deux fois la courbure totale du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (*fig.* 3). Un fait analogue aura lieu pour tout polygone géodésique réductible, quels que soient ses points doubles. On devra alors multiplier respectivement les courbures totales des différentes régions que détermine ce contour par des entiers convenablement choisis, qui ne sont autres que les *indices* de Gauss relatifs à ces régions.

Fig. 3.



Nous raisonnerons exclusivement, dans ce qui va suivre, sur des contours tels que les indices des différentes régions qu'ils délimitent soient tous positifs, autrement dit, sur des aires polygones formées de parties additives, que l'on peut regarder comme des *sommes* de polygones ordinaires.

33. Pour démontrer que deux points a, b ne peuvent être joints par deux géodésiques différentes du même type, autrement dit, qu'*un biangle géodésique réductible à un point ne peut exister sur une surface à courbures opposées*, nous remarquerons que cette conclusion est évidente s'il s'agit d'un biangle formé de parties toutes additives, car alors l'égalité qui exprime le théorème de Gauss aurait pour premier membre une quantité positive (la somme des angles du biangle) et pour second membre une courbure totale négative.

Mais, d'autre part, d'après un théorème démontré par M. Brunel (¹), si les indices relatifs à un contour réductible ne sont pas tous positifs, celui-ci est décomposé, par l'un au moins de ses points doubles c,

(¹) *Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 1^er^ juillet 1897.

en deux contours partiels, tous deux réductibles. L'un au moins de ces derniers ne comprendra pas les deux sommets a, b du biangle et sera, par conséquent, soit un nouveau biangle réductible, soit un *monangle* ou biangle dont un angle est égal à π. Nous sommes donc ramené au cas précédent.

34. Supposons, en second lieu, que la ligne L, mentionnée aux nos 29-30, soit une géodésique, de sorte que, u étant la distance normale géodésique d'un point M à L (comptée en grandeur et signe suivant son sens), on ait, pour $u = 0$,

$$C = 1, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = 0,$$

et, par conséquent, pour toute valeur de u différent de zéro,

(18) $$\frac{\partial C}{\partial u}$$

La première inégalité montre encore que la surface est représentée régulièrement par les coordonnées u, v et nous permet, moyennant des raisonnements identiques à ceux du n° 31, d'énoncer notre second théorème fondamental.

Théorème. — *A tout type de lignes joignant un point donné à une géodésique donnée, il correspond une géodésique normale de ce type et il n'en correspond qu'une seule.*

35. La première partie de ce théorème est évidente, une fois établi le théorème du n° 31. La seconde peut encore s'établir à l'aide du théorème de Gauss. Il suffit, à cet effet, de remarquer que la géodésique du type considéré, qui joint le point donné a à un point variable m de la géodésique donnée L, tourne toujours dans le même sens lorsque ce point décrit L (le contraire entraînant manifestement la production d'un biangle réductible). Il en résulte qu'un triangle géodésique est toujours formé de parties additives et, par suite, ne peut être birectangle, d'après le théorème de Gauss.

36. Les coordonnées u, v d'un point, rapportées à une géodésique,

étant des fonctions bien déterminées de la position de ce point et du type du chemin qui joint ce point à un point déterminé, les raisonnements donnés au n° 521 (t. II, Livre V) des *Leçons sur la Théorie des surfaces*, de M. Darboux, s'appliquent d'une façon entièrement générale et montrent qu'*un arc de géodésique est plus court que tout autre chemin terminé aux mêmes points et de même type.*

37. Si maintenant, au lieu de l'inégalité (17), qui nous a servi à établir notre second théorème fondamental, nous envisageons l'inégalité (18), celle-ci nous montre, par une conséquence tout analogue à celle qui s'offre dans le cas des surfaces à courbure positive [1], que *lorsqu'un point décrit une géodésique* L′, *sa distance normale (d'un type déterminé quelconque) à une géodésique* L *ne peut avoir de maximum et croît indéfiniment en valeur absolue, si elle est croissante à quelque moment.*

Ce fait essentiel va tout d'abord nous permettre d'énumérer complètement les géodésiques fermées.

Théorème. — *A chaque espèce de contours fermés correspond une géodésique de cette espèce, et il n'en correspond qu'une seule.*

Il n'y a exception que pour les contours simples correspondant aux nappes infinies non évasées.

1° On peut joindre un point quelconque a de la surface à lui-même par une ligne géodésique appartenant à l'espèce donnée. Cela se peut même d'une infinité de façons, puisqu'à cette espèce correspondent une infinité de types de lignes partant du point a et y aboutissant; mais, parmi tous les chemins ainsi obtenus, il n'y en a qu'un nombre fini dont la longueur ne dépasse pas une limite déterminée quelconque (25). Donc, il existe un de ces chemins dont la longueur est minimum. Soit l ce minimum, l est une fonction continue de la position du point a, laquelle a par conséquent un minimum lorsque ce point varie sur la surface limitée S′.

Mais, en général, l augmente indéfiniment lorsque le point a s'éloigne indéfiniment.

---

(1) *Voir* le Mémoire cité : *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique* (ce *Journal*, 5e série, t. III, n° 18, 1897, p. 346-347).

Donc, l a un minimum sur la surface entière S et ce minimum donne la géodésique fermée cherchée.

Le raisonnement n'est en défaut que si l n'augmente pas indéfiniment avec l'éloignement du point a, ce qui ne peut se présenter que pour les contours correspondant aux nappes infinies non évasées. Nous verrons plus loin qu'il y a réellement exception dans ce cas.

2° Supposons qu'il y ait deux géodésiques fermées L, L′ appartenant à l'espèce donnée. Soient m' un point quelconque de L′, u sa distance à L, comptée suivant le type du chemin que décrit ce point lorsque L′ vient coïncider avec L par une déformation continue. Nous savons (28) que la distance u reprend sa valeur initiale lorsque le point M′ revient à sa position primitive après description de la ligne L′. Cette distance devrait donc avoir un maximum en valeur absolue, ce dont nous avons démontré l'impossibilité.

Pour obtenir le même résultat par l'application du théorème de Gauss, on remarquerait que les géodésiques abaissées, normalement à L, des positions successives du point M′ ne sauraient s'entrecroiser, sans quoi il se produirait un biangle réductible ou un triangle birectangle réductible; autrement dit, les deux géodésiques L et L′ pourraient être considérées comme délimitant une aire formée de parties additives. L'application du théorème de Gauss à cette aire conduirait à une contradiction.

Remarque I. — Il résulte, soit du n° 31, soit d'une démonstration analogue à la précédente, qu'*il n'existe pas, sur les surfaces à courbures opposées, de géodésiques fermées réductibles.*

Remarque II. — La géodésique fermée correspondant à l'espèce $\mathfrak{S}^m$ n'est évidemment autre que la géodésique fermée d'espèce $\mathfrak{S}$, parcourue $|m|$ fois dans son sens primitif ou en sens inverse, suivant le signe de m.

Ainsi, au point de vue de l'obtention des géodésiques fermées, nous n'aurons pas à considérer d'espèce qui soit multiple d'une autre.

En particulier, *une surface à connexion double n'admet qu'une seule géodésique fermée.*

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse deux, les géodésiques

fermées sont en nombre infini. Cette infinité est d'ailleurs évidemment *dénombrable*.

38. On peut remarquer que ces géodésiques fermées en nombre infini forment un ensemble condensé en soi, au sens de Cantor; c'est-à-dire qu'étant donnée une géodésique fermée L, d'espèce $\mathfrak{S}$, il existe une infinité d'autres géodésiques fermées ayant au moins un élément aussi voisin qu'on veut d'un élément déterminé quelconque de L.

IV. — Géodésiques asymptotiques.

39. D'après le n° 37, si L, L′ sont deux géodésiques, lorsqu'un point m' se meut indéfiniment (dans un sens déterminé) sur L′, sa distance à L, relative à un type déterminé quelconque, ne peut varier que d'après les trois lois suivantes :

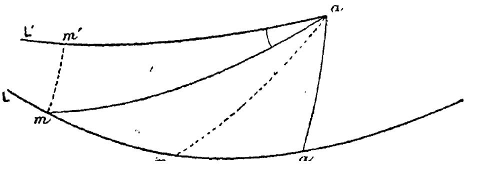
1° Croître constamment depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ou décroître constamment de $+\infty$ à $-\infty$ (on peut dire alors que les deux lignes *se coupent suivant le type considéré*) ;

2° Partir de $-\infty$ et y revenir après un minimum de valeur absolue;

3° Partir de $-\infty$ pour tendre vers zéro sans jamais changer de signe ni de sens de variation (ou la variation inverse).

La possibilité des deux premiers cas est évidente. Celle du troisième s'établit par les considérations bien connues qui s'offrent dans la

Fig. 4.



Géométrie non euclidienne. Soit a' un point de la surface, A une géodésique joignant ce point à un point a d'une géodésique L. Considérons un point m qui s'éloigne indéfiniment sur L, dans un sens

déterminé, à partir du point a (*fig.* 4) et traçons la géodésique $a'm'$ du type A. L'angle $\widehat{ma'a}$ va constamment en croissant; il reste constamment inférieur à une limite déterminée, à savoir l'angle extérieur en a du triangle $ma'a$. Donc *$a'm$ tend vers une limite* L'.

La géodésique L' présente évidemment avec L la relation indiquée en dernier lieu. Nous dirons qu'elle est *asymptote* à L. Nous voyons qu'à chaque type de lignes allant d'un point à une géodésique correspondent deux asymptotes de ce type; on peut considérer ces dernières comme les géodésiques qui, appartenant au type en question, joignent le point donné aux points à l'infini sur la géodésique donnée.

40. Réciproquement, si deux géodésiques L, L' sont asymptotes l'une à l'autre, c'est-à-dire si leur distance mutuelle comptée suivant un type déterminé (par exemple celui d'une certaine ligne joignant entre eux deux points a, a' pris sur ces géodésiques) tend vers zéro, *la ligne* L' *est l'asymptote à* L *menée par a' à l'aide de la méthode précédente.*

Soit, en effet, mm' une ligne joignant deux points pris respectivement sur L, L' et dont la longueur λ tend vers zéro à mesure qu'elle s'éloigne indéfiniment (*fig.* 4). Les deux points m, m' sont supposés se déplacer d'une façon continue et la ligne mm' dériver par continuité de la ligne donnée aa'. Il en résulte que le quadrilatère $aa'mm'$ est réductible.

Joignons les deux points a', m par la géodésique qui, considérée comme ligne allant du point a' à la ligne mm', est du type $a'm'$. L'angle α des deux lignes $a'm'$, $a'm$ est infiniment petit, car (u et v désignant des coordonnées polaires géodésiques rapportées au point a, C^2 le coefficient de dv^2 dans l'élément linéaire relatif à ces coordonnées) on a

$$\lambda = \int_{mm'} \sqrt{du^2 + C^2\,dv^2} > \int_{mm'} C\,dv > (\overline{a'm'} - \lambda)\alpha,$$

à cause de l'inégalité $C > u$, établie au nº 31.

Donc $a'm'$ est bien la limite de $a'm$; ce qui démontre la conclusion, car la réductibilité du quadrilatère $aa'mm'$ et celle du triangle $a'mm'$ entraînent celle du triangle $a'am$.

Corollaires. — *Si une géodésique L′ est asymptote à une géodésique L, réciproquement celle-ci est asymptote à la première suivant le même type.*

Deux géodésiques asymptotes à une même troisième sont asymptotes entre elles.

41. Au contraire, *les asymptotes menées par un même point à deux géodésiques non asymptotes l'une à l'autre ne peuvent coïncider.*

Toutefois, cette dernière proposition n'est exacte que moyennant une convention spéciale.

Lorsque nous comparerons entre elles les géodésiques issues d'un même point a, nous aurons dorénavant égard à leurs éléments en a, et nous dirons qu'il y a deux géodésiques distinctes s'il y a deux éléments distincts ; de sorte qu'une seule et même géodésique pourra figurer à double titre dans l'énumération des géodésiques issues de a, si elle a un point double en a.

Deux points a, a' étant joints par une ligne déterminée, les asymptotes menées par a, suivant le type aa', à deux géodésiques distinctes issues de a ne peuvent coïncider.

42. Deux asymptotes menées d'un même point a à une même géodésique L, mais différant par le type, peuvent-elles coïncider ?

Supposons qu'une ligne ax soit asymptote à la géodésique L′ de deux manières différentes et soient mm', mm'' deux lignes de types différents joignant le point m de ax à L′, variant d'une manière continue et tendant vers zéro à mesure que le point m s'éloigne indéfiniment. La ligne $m'mm''$, jointe à l'arc $m'm''$ de L′, forme un contour fermé d'espèce invariable $\mathfrak{S}$, puisque ce contour se déforme continûment.

De considérations développées un peu plus loin (nos 53-54) et qui ne supposent en rien les présentes [1], il résulte que L′ est asymptote à la géodésique fermée L'_0 d'espèce $\mathfrak{S}$.

Réciproquement, dans ce cas, il y a effectivement

[1] Toutefois il est supposé en cet endroit, et par conséquent ici, que L′ ne sort pas d'une portion finie de la surface.

car les asymptotes de L′ sont les mêmes que celles de L'_0, lesquelles ne changent pas quand on multiplie les types par le symbole de l'espèce $\mathfrak{S}$.

Si la ligne L′ est elle-même la géodésique fermée d'espèce $\mathfrak{S}$, *une même asymptote ne peut provenir de deux types différents*, puisqu'ici deux types différant entre eux par le symbole L′ doivent être regardés comme identiques.

43. Nous avons étudié au Chapitre précédent les géodésiques fermées. Les considérations actuelles nous conduisent à envisager les géodésiques asymptotiques aux géodésiques fermées. On voit qu'une telle géodésique L sera déterminée lorsqu'on aura donné :

1° L'espèce de la géodésique fermée correspondante L_0;
2° Un point a de L;
3° Un type de lignes allant du point a à L_0.

Nous réunirons dans une même catégorie les géodésiques fermées et leurs asymptotes. Les premières peuvent évidemment, en effet, être regardées comme un cas particulier des secondes.

Cette réunion est d'ailleurs imposée par les corollaires du n° 40, lesquels nous conduisent à ranger dans une même classe les géodésiques asymptotes entre elles.

44. L étant de nouveau une géodésique quelconque, reprenons le triangle $aa'm$ (*fig.* 4) considéré au n° 39, aa' désignant, pour fixer les idées, une géodésique normale à L, soient λ la longueur aa', l l'arc am (ou, si L est fermée, celui des arcs am qui correspond à une position actuellement considérée de la géodésique variable $a'm$).

Donnant d'abord à l une valeur déterminée am_0, nous aurons

$$\widehat{am_0a'} < \frac{\lambda}{l}.$$

Supposons que, dans toute l'étendue du triangle ama', la courbure soit inférieure en valeur absolue à une limite déterminée, ce qui aura lieu nécessairement si ce triangle est dans une partie finie de la surface. Si alors u, v désignent, comme au n° 34, des coordonnées géodésiques rapportées à L, la quantité C sera, en vertu de l'équa-

tion (13), inférieure à $\frac{1}{2}(e^{k\lambda} + e^{-k\lambda})$. Ceci fournit une limite supérieure de l'aire du triangle et, par suite, de sa courbure, laquelle est plus petite que

il en sera encore de même pour la courbure du triangle géodésique $aa'm_1$ où m_1 est un point de l'arc am. D'autre part, si m_1 est situé au delà de m_0, il suffira, pour obtenir la courbure du triangle $aa'm_1$, d'ajouter à la courbure du triangle $aa'm_0$ celle du triangle $a'm_0m_1$, laquelle est inférieure à l'angle $\widehat{am_0a'}$.

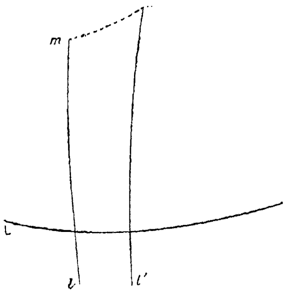
Donc *la courbure du triangle $aa'm_1$ est inférieure à une quantité fixe que l'on peut assigner dès que l'on connaît* λ, *sans connaître la position du point a ni celle de la géodésique* L (pourvu que le premier soit dans une région finie de la surface) *et qui tend vers zéro avec* λ.

Il en est de même, par conséquent, pour la différence entre l'angle $\widehat{a'ay}$ (*fig.* 4) et l'angle que fait l'asymptote L′ avec aa' : car cette différence est la limite de la courbure qui vient d'être étudiée.

45. A ce résultat nous en rattacherons un autre qui nous sera utile plus loin.

Soient m, m' deux points très voisins l'un de l'autre (*fig.* 5). De

Fig. 5.



ces deux points, abaissons sur une géodésique quelconque L des géodésiques normales l, l' qui dérivent l'une de l'autre lorsqu'on va de m en m' par le chemin très petit qui joint ces deux points.

On peut assigner à l'angle que font entre elles les tangentes menées à l, l' respectivement aux points m, m' une limite supérieure dépendante de la distance mm' et tendant vers zéro avec cette distance, mais indépendante du choix de la géodésique L et des points m, m', pourvu qu'on sache que ceux-ci sont dans une région finie et déterminée de la surface.

En effet, la différence des angles que font respectivement l, l' avec la géodésique très petite mm' est plus petite que la limite supérieure trouvée au numéro précédent.

V. — Géodésiques qui s'éloignent a l'infini.

46. Nous savons qu'à chaque nappe infinie $\mathfrak{N}_i$ correspond un contour simple, et par conséquent (si cette nappe est évasée, ce que nous supposerons) une géodésique fermée γ_i.

C'est cette ligne que nous prendrons désormais pour position initiale de la courbe C_i dont il a été question en commençant (n° 8), position initiale qui limite la nappe $\mathfrak{N}_i$.

Ainsi qu'il a été remarqué (n° 27), il n'existe sur $\mathfrak{N}_i$ qu'un seul type de lignes allant d'un point quelconque m à la courbe limite γ_i, de sorte que *la distance géodésique u du point m à cette courbe est une fonction parfaitement déterminée et univoque de la position de ce point.*

Comme cette distance ne peut avoir de maximum sur une géodésique et doit croître constamment et indéfiniment si elle est croissante à un moment quelconque, *une géodésique qui a pénétré dans la nappe* $\mathfrak{N}_i$ *ne peut plus en ressortir : elle s'éloigne forcément à l'infini sur cette nappe*, et cela régulièrement (c'est-à-dire sans alternatives de retour à distance finie).

47. De ce qui précède résulte que, si une géodésique s'éloigne à l'infini, il en est de même de toute une géodésique infiniment voisine de la première.

48. Soit une géodésique issue d'un point O, non situé sur la nappe $\mathfrak{N}_i$, et qui pénètre dans cette nappe en coupant γ_i en un point m.

Lorsque ce point se déplace continûment en décrivant γ_i dans un sens ou dans l'autre, la géodésique Om tourne autour du point O sans cesser de s'éloigner à l'infini sur la nappe $\mathfrak{N}_i$.

En supposant que le point m se meuve indéfiniment dans un sens, puis dans le sens opposé, on voit que Om occupera successivement toutes les positions comprises dans l'angle $\mathcal{A}$ que font entre elles les deux asymptotes menées par le point O à γ_i et du type de Om.

Les angles $\mathcal{A}$ vont jouer un rôle fondamental dans les considérations qui seront présentées un peu plus loin. Ils sont en nombre infini autour d'un même point, si l'ordre de connexion de la surface est supérieur à 2.

Deux propriétés de ces angles nous seront principalement utiles :

1° *Les côtés d'un angle $\mathcal{A}$ sont des géodésiques qui restent à distance finie* (ce sont des asymptotes à une courbe γ_i);

2° *Deux angles $\mathcal{A}$ différents ne peuvent avoir un côté commun* (41, 42).

49. Supposons que toutes les nappes infinies soient évasées : alors à chacune d'elles correspondra une géodésique fermée γ. Ces n lignes n'ont évidemment, d'après ce qui précède, aucun point commun. Elles divisent la surface en n nappes infinies et une partie S' limitée en tous sens. C'est cette dernière que nous nommerons dans ce qui va suivre, la *partie finie* de la surface : en sorte que cette locution aura pour nous dorénavant un sens parfaitement précis.

Nous voyons que, *si une géodésique quelconque ne s'éloigne pas à l'infini régulièrement sur une nappe déterminée, elle reste constamment comprise dans la partie finie de la surface.*

50. Nous dirons quelques mots du cas où les nappes infinies ne sont pas toutes évasées. Dans ce cas, les conclusions précédentes ne subsistent plus.

Soient, en effet, $\mathfrak{N}_i$ une nappe non évasée, $\mathcal{C}_i$ l'espèce de contours simples correspondante.

Il n'existe pas de géodésique fermée de cette espèce $\mathcal{C}_i$; car, s'il y en avait une et qu'on rapportât les points de $\mathfrak{N}_i$ aux coordonnées u, v relatives à cette géodésique, la quantité C augmenterait indéfini-

ment avec u, et il en serait, par conséquent, de même de l'intégrale

$$\sqrt{du^2 + C^2\, dv^2}$$

étendue à une courbe indéfiniment éloignée d'espèce C_i.

Le même fait résulte, d'ailleurs, du théorème de Gauss appliqué à l'aire comprise entre la géodésique supposée et une courbe indéfiniment éloignée d'espèce $\mathcal{C}_i$, si l'on part, conformément à ce qui a été dit au n° 15, de ce que l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ étendue à cette dernière courbe est infiniment petite.

Cette dernière démonstration a l'avantage de mettre clairement en évidence ce fait que *la géodésique fermée située sur la nappe non évasée doit être considérée comme rejetée à l'infini.*

51. On voit aussi (ce qui était à peu près évident d'après les remarques faites au n° 13) que l'on peut faire varier la courbe C considérée en cet endroit de manière que son périmètre aille constamment en décroissant. Autrement dit, $(\mathcal{C})$ étant une position quelconque de cette courbe, il existe au delà de $(\mathcal{C})$ des courbes de même espèce et de périmètre plus petit que celui de toute autre courbe analogue située en deçà de $(\mathcal{C})$. Dans le cas contraire, en effet, les raisonnements du n° 37 continueraient à s'appliquer et montreraient l'existence d'une géodésique fermée d'espèce $(\mathcal{C})$.

On en conclut que, si $\mathcal{C}'$ est un contour quelconque distinct de $\mathcal{C}$, la géodésique fermée d'espèce $\mathcal{C}\ \mathcal{C}'$ (laquelle a forcément des parties à distance finie) s'éloigne autant qu'on veut sur la nappe non évasée si l'on prend le nombre n assez grand.

En un mot, la distinction que nous avons pu faire, en général, entre les nappes infinies et la partie finie de la surface cesse d'être possible dans ce cas spécial.

Nous nous bornerons à ces indications sur les nappes non évasées, et, dans tout ce qui va suivre, nous exclurons expressément leur existence.

52. Les considérations qui précèdent permettent d'étudier la

distribution des géodésiques lorsque la surface est à connexion simple ou double.

Si, en effet, l'ordre de connexion est égal à 1, il ne peut y avoir de géodésique fermée, et la distance d'un point M à un point fixe quelconque O (distance qui est une fonction parfaitement déterminée de la position de M) augmente indéfiniment lorsque M décrit une géodésique. Toutes les géodésiques s'en vont, par conséquent, à l'infini, et *la distribution est entièrement analogue à celle des droites d'un plan* [1]. C'est un résultat qu'on peut vérifier aisément sur le paraboloïde hyperbolique.

Supposons, maintenant, que l'ordre de connexion soit égal à 2. Alors il n'y aura qu'un contour élémentaire, le contour simple correspondant à l'une quelconque des nappes infinies : la géodésique fermée correspondante divise la surface en deux nappes infinies. La partie finie de la surface n'existe pas. Donc toutes les géodésiques s'éloignent à l'infini, sauf celles qui sont asymptotes à la géodésique fermée : ces dernières passent, au nombre de 2, par chaque point de la surface.

C'est en particulier ce qui se passe sur l'hyperboloïde à une nappe, et notre résultat est conforme à celui qu'obtient Halphen sur la surface gauche de révolution.

On remarquera que la nature du résultat obtenu tient : 1° à ce qu'il n'y a qu'une seule espèce de contours fermés essentiellement distincts; 2° en particulier, à ce que les contours simples correspondant aux deux nappes infinies sont équivalents.

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse 2 :

1° Les contours fermés essentiellement distincts sont en nombre *infini*;

2° Les contours simples relatifs aux différentes nappes infinies sont tous distincts les uns des autres.

Grâce à cette double circonstance, les résultats obtenus en général vont être fort différents de ceux qui s'offrent dans les deux cas particuliers que nous venons d'examiner.

[1] Plus exactement, d'un plan non euclidien.

VI. — Géodésiques de troisième catégorie; classification générale.

53. Ainsi que nous l'avons dit au n° 51, nous supposerons que les nappes infinies sont toutes évasées.

Nous avons, dans les Chapitres précédents, considéré deux classes de géodésiques : celles qui sont fermées ou asymptotiques aux géodésiques fermées, et celles qui s'éloignent indéfiniment. Nous allons maintenant étudier les géodésiques qui ne rentrent dans aucune des deux catégories précédentes.

Envisageons une géodésique L, définie par un élément initial (soit un point O et la tangente en ce point). Si cette géodésique ne s'éloigne pas à l'infini, elle reste constamment comprise dans la partie finie de la surface. Dès lors on peut évidemment trouver sur cette ligne, d'une infinité de façons, deux éléments voisins, autrement dit deux points m, m', tels que :

1° L'arc mm' compris entre ces deux points, sur la ligne L, soit supérieur à une longueur déterminée quelconque λ;

2° La plus courte ligne géodésique l qui joint ces deux points soit inférieure à une quantité quelconque donnée ε;

3° L'angle des deux tangentes en m, m' soit également inférieur à ε.

La ligne l forme, avec l'arc mm' de L, un contour fermé $\mathcal{C}$, lequel n'est pas réductible à un point, puisque c'est un biangle géodésique. Soit L_0 la géodésique fermée d'espèce $\mathcal{C}$.

Considérons la distance normale u d'un point quelconque de L à la ligne L_0, distance comptée suivant un type tel qu'elle revienne à sa valeur primitive lorsque ce point décrit le contour $\mathcal{C}$ (28). La différence des deux valeurs de u au point m et au point m' est très petite, et il en est de même (45) de la différence des deux valeurs de $\frac{du}{ds}$.

Je dis que u et $\frac{du}{ds}$ sont très petits en valeur absolue tout le long de l'arc mm'.

Pour le démontrer, supposons d'abord que u change de signe sur l'arc mm' de L et, par conséquent, aussi sur la ligne l : u sera très petit en m et en m', donc aussi tout le long de l'arc mm'. D'ailleurs, $\frac{d^2 u}{ds^2}$ étant infini, $\frac{du}{ds}$ sera également très petit, en vertu d'un lemme démontré dans le Mémoire précédemment cité [1].

Supposons, en second lieu, que u garde un signe invariable sur le contour; alors il en sera de même de $\frac{d^2 u}{ds^2}$; comme la différence des valeurs de $\frac{du}{ds}$ en m et m' est très petite, $\frac{d^2 u}{ds^2}$ devra être très petit en valeur absolue (sauf tout au plus pour des arcs de longueur totale très petite). D'ailleurs, $\frac{du}{ds}$ est aussi très petit, car u varie toujours dans le même sens; ce fait résulte de ce que la variation de u est très petite et, si u a un minimum, de ce que les deux valeurs initiale et finale de $\frac{du}{ds}$, lesquelles sont très peu différentes, comprennent entre elles zéro.

Dès lors, l'équation de L, rapportée à la géodésique L_0,

$$d^2 \iota$$

montre que $\frac{1}{C}\frac{\partial C}{\partial n}$ doit être très petit. L'équation

prouve aisément qu'il doit en être de même de u, si la courbure (prise en valeur absolue) ne descend jamais au-dessous d'une limite déterminée, ou du moins ne devient très petite que dans des aires suffisamment petites dans toutes leurs dimensions et séparées par des intervalles non très petits.

Notre conclusion est donc démontrée dans tous les cas.

54. Si u continue à décroître en valeur absolue, notre géodésique est asymptote à L_0; sinon, nous devons supposer que u a un certain minimum, après lequel L s'éloigne à nouveau de L_0.

[1] *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique*, n° 4, p. 334.

D'après cela, si, outre les deux catégories de géodésiques rencontrées dans les Chapitres précédents, il en existe une troisième, chacune des lignes de cette dernière catégorie correspondra à une série infinie de géodésiques fermées $L_0, L_1, \ldots, L_i, \ldots$, de chacune desquelles elle s'approchera successivement pour l'abandonner ensuite; elle serrera ces géodésiques successives de plus en plus près, et cela sur des longueurs de plus en plus considérables.

En un mot, la géodésique en question possède la propriété indiquée par M. Poincaré [1], à savoir que les équations du problème admettent « une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence des deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut ».

55. La suite des géodésiques L_i suffit-elle à définir la géodésique L ?

Pour nous en rendre compte, considérons, sur L, un point m séparé du point O par un arc très grand et, d'autre part, très voisin d'un point m' d'une des géodésiques L_i, de manière que les tangentes menées en ces deux points aux deux lignes fassent un angle très petit. Joignons Om' par la géodésique qui équivaut à l'arc Om joint à la ligne infiniment petite mm'. Cette géodésique fera avec L un angle très petit, comme on le démontre par le raisonnement déjà invoqué au n° 40. Elle fera aussi un angle très petit avec L_i et, par suite, aussi avec l'asymptote menée du point O à cette ligne, suivant le même type; car la différence des angles que font Om, Om' avec mm' est sensiblement égale à la courbure totale du triangle Omm', laquelle est très petite (44), et, d'autre part, les angles de L et de L_i avec mm' sont aussi très peu différents.

Donc L *est la limite d'asymptotes menées du point* O *aux lignes* L_i.

On voit, par conséquent, que, s'il existe une géodésique de la troisième catégorie, on devra, pour l'obtenir, considérer :

1° Une série de géodésiques fermées L_i correspondant à des espèces de plus en plus compliquées;

2° Un point O;

3° Une série de types $\mathfrak{T}_i$ de chemins allant respectivement du point O à chacune des lignes L_i.

---

(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 82.

Les asymptotes menées du point O à chacune des lignes L_i, suivant le type $\mathfrak{T}_i$ correspondant, tendront (du moins si les L_i, $\mathfrak{T}_i$ ont été choisis convenablement) vers une position limite qui sera la géodésique demandée L.

On remarquera que toute géodésique asymptote à L sera définie par la même suite de symboles L_i, $\mathfrak{T}_i$, le point O changeant seul; de sorte que cette suite de symboles, lorsque le point O reste indéterminé, définit une *classe* de géodésiques, en prenant ce mot avec le sens qui lui a été donné au n° 43.

56. Il reste à savoir si les trajectoires dont nous venons de supposer l'existence se présentent véritablement.

La réponse à cette question est affirmative; nous allons constater, en effet, que les géodésiques fermées et leurs asymptotes ne peuvent constituer à elles seules la totalité des géodésiques qui restent à distance finie.

Soit O un point que nous supposerons, pour fixer les idées, situé dans la partie finie de la surface; nous désignerons par E l'ensemble formé par les directions initiales des lignes géodésiques qui en partent [1] et ne s'éloignent pas indéfiniment.

D'après ce que nous avons vu précédemment, cet ensemble est formé par les lignes qui ne sont intérieures à aucun des angles que nous avons désignés (48) par la lettre $\mathcal{A}$, les côtés de ces angles faisant partie de l'ensemble.

Je dis qu'un tel ensemble est *parfait* :

1° *Toute ligne qui appartient à l'ensemble* E *appartient aussi à son dérivé.*

En effet, si une géodésique L appartenant à l'ensemble E sert de côté à un angle tel que toutes les directions intérieures à cet angle soient celles de géodésiques qui s'éloignent indéfiniment, cet angle ne peut être qu'un angle $\mathcal{A}$. Mais alors, de l'autre côté de L se trouveront des lignes appartenant à l'ensemble E : le contraire exigerait, en effet, que L serve de côté commun à deux angles $\mathcal{A}$ différents, ce qui ne peut être (48).

[1] Il est clair que nous adoptons ici la convention du n° 41.

2° *Toute ligne qui n'appartient pas à l'ensemble* E *n'appartient pas à son ensemble dérivé.*

C'est ce que nous avons remarqué au n° 47.

Donc l'ensemble E est bien parfait et, comme tel, *de seconde puissance.*

Or les asymptotes menées par le point O aux différentes géodésiques fermées forment un ensemble numérable.

Donc l'existence des géodésiques de la troisième catégorie est démontrée.

57. La génération de l'ensemble E rappelle évidemment celle de ces ensembles rencontrés par M. Poincaré, introduits plus explicitement dans la Science par M. Bendixson, puis étudiés par M. Cantor et qui, tout en étant parfaits, ne sont *condensés* dans aucun intervalle. Les angles $\mathcal{A}$ jouent ici le rôle des intervalles nommés (a_ν, b_ν) par M. Cantor [1].

Nous allons montrer que l'ensemble E appartient effectivement à la catégorie dont nous venons de parler.

Pour cela, soit P un second point quelconque de la surface et désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des directions initiales des différentes géodésiques qui vont du point O au point P.

Je dis que l'ensemble $\mathcal{E}$ *a pour dérivé* E.

Tout d'abord, une géodésique L, issue du point O et qui s'éloigne à l'infini sur une nappe quelconque $\mathfrak{N}_i$, n'appartient pas au dérivé de E. Prenons, en effet, sur cette ligne un arc déterminé $Om = l$: une géodésique suffisamment voisine de L, mais non coïncidente avec elle, ne passera, assurément pas, par le point P, de manière que l'arc OP soit inférieur à l. Mais le point P ne peut pas non plus être l'extrémité d'un arc supérieur à l, porté sur une géodésique voisine de L, si l'arc l a été pris assez grand pour que son extrémité m soit sur la nappe $\mathfrak{N}_i$ et (dans le cas où le point P serait également sur cette nappe) à une distance de γ_i plus grande que celle de P.

Nous avons maintenant à démontrer la conclusion réciproque, à savoir que si la géodésique L est tout entière à distance finie, il

---

(1) *Acta mathematica*, t. IV, 1884, p. 381.

existe des géodésiques faisant avec elle, en O, un angle aussi petit qu'on veut et passant par le point P.

Supposons d'abord que L soit asymptote à une géodésique fermée $\mathfrak{L}$, d'espèce $\mathfrak{S}$ (ce cas comprenant celui où L serait elle-même une géodésique fermée). L est la limite de géodésiques joignant O à un point déterminé quelconque m de $\mathfrak{L}$ et dérivant de l'une d'entre elles par un nombre de plus en plus grand de circulations du point m suivant $\mathfrak{L}$: soit $L^{(k)}$ la géodésique Om correspondant à k circulations et dont la longueur λ_k augmente indéfiniment avec k. Imaginons que le point m se rende en P par un chemin déterminé une fois pour toutes et de longueur l : la géodésique OP qui, dans ce déplacement, dérive par continuité de $L^{(k)}$, fait avec celle-ci (40) un angle inférieur à $\frac{l}{\lambda_k - l}$. Elle est donc infiniment voisine de $L^{(k)}$ et, par suite, de L pour k infini.

La conclusion demandée est ainsi établie si L est fermée ou asymptote à une géodésique fermée. Dès lors, elle s'étend d'elle-même aux géodésiques de troisième catégorie, puisque celles-ci sont des limites de lignes telles que la ligne L qui vient d'être considérée.

Le théorème est donc complètement démontré.

58. Les considérations précédentes nous permettent de prouver, comme nous l'avons annoncé, que l'ensemble E, quoique parfait, n'est condensé dans aucun intervalle : c'est-à-dire que, près de toute ligne appartenant à cet ensemble, se trouvent une infinité de lignes qui n'y appartiennent point.

Il suffit en effet, dans le raisonnement précédent, de prendre le point P sur une nappe infinie, puisque toutes les géodésiques qui passent par un tel point s'éloignent indéfiniment.

Il est donc bien prouvé que *l'ensemble* E *est un ensemble parfait, qui n'est nulle part continu.*

Mais de ce que nous venons de dire se dégagent des conclusions plus étendues à certains égards. Nous voyons, en effet:

1° *Que, dans le voisinage d'une ligne* L *faisant partie de l'ensemble* E, *on trouve des géodésiques allant à l'infini sur telle nappe infinie qu'on veut,* puisque le point P peut être pris sur n'importe quelle nappe infinie;

2° Que, dans le voisinage de cette même ligne, existent aussi d'autres lignes restant à distance finie, en particulier *des asymptotes à toutes les géodésiques* γ_i, puisque ces asymptotes servent de côtés aux angles $\mathcal{A}$, *et des géodésiques de troisième catégorie :* celles-ci sont, en effet, distribuées dans tout angle contenant des éléments de E, puisque les asymptotes aux géodésiques fermées ne forment qu'une partie numérable de l'ensemble parfait E.

En un mot, tandis que toute géodésique qui s'éloigne à l'infini est entouré d'un continuum de géodésiques jouissant de la même propriété, au contraire, *tout changement, si minime qu'il soit, apporté à la direction initiale d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe*, la géodésique troublée pouvant affecter n'importe laquelle des formes énumérées précédemment.

59. Les circonstances que nous venons de rencontrer se retrouveront-elles dans d'autres problèmes de Mécanique ? Se présenteront-elles, en particulier, dans l'étude des mouvements des corps célestes ? C'est ce qu'on ne saurait affirmer. Il est probable, cependant, que les résultats obtenus dans ces cas difficiles seront analogues aux précédents, au moins par leur complexité.

S'il en était ainsi, il importe de remarquer que l'un des principaux problèmes de la Mécanique céleste, la question de la stabilité du système du monde, même sous son aspect théorique (c'est-à-dire réduite au mouvement de n points matériels s'attirant suivant la loi de Newton), cesserait d'avoir un sens.

Certes, lorsqu'un système se meut sous l'action de forces données et que les conditions initiales du mouvement ont des valeurs *données, au sens mathématique du mot*, le mouvement ultérieur et, par conséquent, la manière dont il se comporte, lorsque t augmente indéfiniment, sont par cela même connus. Mais, dans les problèmes astronomiques, il ne saurait en être ainsi : les constantes qui définissent le mouvement sont données *physiquement*, c'est-à-dire avec des erreurs dont l'amplitude se réduit à mesure que la puissance de nos moyens d'observation augmente, mais qu'il est impossible d'annuler.

Si l'on ne suit les trajectoires que pendant un temps déterminé, quelconque d'ailleurs, on peut imaginer que les erreurs sur les données initiales aient été rendues assez minimes pour ne pas altérer sensiblement la forme de ces trajectoires pendant le susdit intervalle de temps. Ce qui précède nous montre qu'il n'est en aucune façon légitime d'en tirer une conclusion analogue relativement à l'allure *finale* de ces mêmes courbes. Celle-ci peut fort bien dépendre (et dépend, en effet, dans les problèmes relativement simples auxquels est consacré le présent Mémoire) de propriétés discontinues, *arithmétiques* des constantes d'intégration.

60. De quelle nature sont ces propriétés? Pour nous borner aux cas que nous avons traités, dans quelle voie doit-on chercher à compléter la discussion que nous avons donnée des géodésiques sur les surfaces à courbures opposées et à connexion multiple? La première question qui se pose à cet égard est la suivante :

Nous avons vu que les géodésiques issues d'un point quelconque O sont :

1° Les géodésiques fermées ou leurs asymptotiques, dont chacune est caractérisée par une espèce $\mathcal{S}$ de contours fermés, un type $\mathcal{T}$ de lignes joignant le point O à la géodésique fermée d'espèce $\mathcal{S}$;

2° Les géodésiques qui vont à l'infini, distribuées dans les différents angles $\mathcal{A}$: chacun de ces angles est caractérisé par une nappe infinie et un type de lignes menées de O à la géodésique fermée correspondant à cette nappe;

3° Les géodésiques de la troisième catégorie, qui sont des limites de celles que nous avons nommées en premier lieu.

Il y aurait lieu d'étudier l'*ordre circulaire* dans lequel ces lignes sont rangées autour de O.

Il est d'ailleurs clair qu'il suffit de trouver la distribution des géodésiques de la première sorte, car entre celles-là viendront évidemment se placer d'eux-mêmes les angles $\mathcal{A}$ d'une part, les géodésiques de la troisième catégorie de l'autre.

61. L'étude de cet ordre circulaire est d'ailleurs simplifiée par

cette circonstance que *cet ordre ne dépend pas de la position du point* O.

En effet, lorsque ce point se déplace, deux lignes de symboles différents ne peuvent coïncider et, par conséquent, leur ordre reste invariable.

Il résulte presque évidemment de ce fait que, si deux symboles correspondent à deux géodésiques infiniment voisines, issues d'un point O, ils donneront encore deux géodésiques infiniment voisines en un second point O'; et, effectivement, l'on peut démontrer directement que les asymptotes menées du point O' (suivant le type d'un chemin OO' déterminé) à deux géodésiques très voisines issues du point O, sont aussi très voisines l'une de l'autre.

Supposons maintenant que le point O revienne à sa position primitive après s'être déplacé le long d'un certain contour fermé non réductible. Notre ordre circulaire ne sera pas altéré par cette opération, qui consiste à multiplier tous les types $\mathfrak{T}$ envisagés tout à l'heure par celui du contour en question (considéré comme joignant le point O à lui-même).

Ainsi l'on devra trouver, entre les symboles énumérés en 1° (numéro précédent), *un ordre circulaire qui ne change pas lorsqu'on multiplie tous les types par un même facteur quelconque.* La détermination générale des ordres jouissant de cette propriété est, par conséquent, un problème dont la solution importerait à notre objet.

62. Quant à la méthode que nous avons employée, on peut la considérer comme une application de deux principes posés par M. Poincaré dans ses études sur les équations différentielles.

En premier lieu, nos conclusions mettent en évidence, une fois de plus, le rôle fondamental que joue dans ces questions l'*Analysis situs.* Qu'il soit absurde d'étudier des courbes intégrales tracées dans un domaine déterminé sans faire entrer en ligne de compte la forme même de ce domaine, c'est une vérité sur laquelle il peut sembler inutile d'insister longuement. Cette vérité est cependant restée insoupçonnée jusqu'aux travaux de M. Poincaré.

En second lieu, l'importance que ce géomètre a reconnue aux solutions périodiques, dans son *Traité de Mécanique céleste*, s'est

manifestée également dans la question actuelle. Ici encore, elles se sont montrées « la seule brèche par laquelle nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable [1]. »

D'une façon plus précise, elles ont joué pour nous le rôle d'une sorte de système de coordonnées auquel nous avons rapporté toutes les autres géodésiques.

(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 82.

SUR LES PROBLÈMES

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES

ET

LEUR SIGNIFICATION PHYSIQUE

(*Princeton University Bulletin*, 1902, p. 49-52.)

« La Physique ne nous donne pas seulement l'occasion de résoudre des problèmes..., elle nous fait pressentir la solution. » — Poincaré.

Les principaux problèmes que les géomètres ont été conduits à se poser relativement aux équations aux dérivées partielles se ramènent à deux types généraux : — le problème de Dirichlet et ses analogues, dans lesquels la fonction inconnue, définie dans un certain domaine, doit vérifier, en chaque point de la frontière de ce domaine, *une* certaine condition (en supposant, pour fixer les idées, l'équation du second ordre); le problème de Cauchy, dans lequel les conditions à remplir en chaque point de la frontière sont au nombre de *deux*, l'une donnant la valeur de la fonction en ce point et l'autre la valeur d'une de ses dérivées premières.

Les deux problèmes ainsi posés se sont présentés dans toute sorte de questions de physique mathématique. D'autre part, on a

pu trouver des cas très étendus dans lesquels l'un ou l'autre de ces problèmes se présentait comme parfaitement bien posé, je veux dire comme *possible* et *déterminé*.

Il est remarquable que ces deux circonstances soient intimement liées l'une à l'autre, et cela d'une manière assez étroite pour que deux problèmes tout à fait analogues en apparence puissent être l'un possible et l'autre impossible, suivant qu'ils correspondent ou non à une donnée physique.

Relativement à l'équation de Laplace

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

c'est le problème de Dirichlet (ou l'un de ses analogues) qui se présente dans les applications physiques. De fait, le problème de Dirichlet est un problème possible et déterminé. Considérons, au contraire, le problème de Cauchy relatif à l'équation (A), c'est-à-dire celui qui consiste à déterminer pour $x \geqq 0$ une solution de cette équation telle que l'on ait, pour $x = 0$,

$$u = u_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = u'_0.$$

u_0 et u'_0 étant deux fonctions données de y, z. Ce problème, dépourvu de signification physique, est toujours possible lorsque u_0 et u'_0 sont des fonctions analytiques. Mais on sait aujourd'hui qu'il en est tout autrement dans le cas général.

D'une manière plus précise, si l'on suppose donnée tout d'abord la fonction u_0, la fonction u'_0 est déterminée à une fonction analytique près, et la forme générale de u'_0 pourra s'obtenir aisément par le moyen suivant :

La fonction u_0 étant définie dans une certaine région du plan de yz, envisageons un cercle C de ce plan, entièrement situé dans la région en question, et la demi-sphère S qui a ce cercle comme grand cercle et est située du côté des x positifs.

La fonction inconnue u pourra être considérée comme déterminée par les valeurs qu'elle prend dans le cercle C (savoir les valeurs u_0) et sur la surface hémisphérique S, et l'on peut former l'expression de u à l'aide de ces quantités, car le volume S est un de ceux pour

lesquels la solution du problème de Dirichlet est connue. Il est aisé de voir que la partie qui correspond aux valeurs de u sur S représente toujours une fonction de x, y, z analytique aux environs de tout point intérieur au cercle C, de sorte que l'on a ce résultat :

Soit W le potentiel d'une double couche distribuée sur le plan de yz, l'épaisseur de cette double couche en chaque point étant représentée par u_0. Le problème de Cauchy n'est possible que si l'on a

$$u_0 = -\frac{\partial W}{2\pi\,\partial x} + \Phi,$$

Φ étant une fonction *analytique* de y et de z.

Considérons maintenant l'équation du son

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

L'étude de la propagation du son conduit à poser, pour cette équation, le problème de Cauchy, ce problème étant, ici, le suivant : « Déterminer pour $t \geqq 0$ une solution u de l'équation précédente, telle que l'on ait, pour $t = 0$,

$$u = U, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = U',$$

U, U′ étant des fonctions données de x, y, z. » Un tel problème est, en général, possible et déterminé. Sa solution est donnée par la formule de Poisson

$$u(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t}[(U)t] + (U')t,$$

où (U) et (U′) sont les valeurs moyennes de U et de U′ sur la sphère de centre x, y, z et de rayon t.

Mais il faudrait se garder d'énoncer cette conclusion sous la forme suivante : « Le problème de Cauchy, relatif à l'équation (B), est possible et déterminé. »

En effet, si cette conclusion est vraie pour le problème que nous venons de considérer, *dans lequel on prend t pour variable principale*, elle est, au contraire, inexacte, *pour la même équation* (B), lorsque la variable principale est x, y ou z, c'est-à-dire pour le problème suivant : « Trouver, pour $x > 0$, une solution u de l'équation (B) telle que l'on

ait, pour $x = 0$,

$$\partial u$$

u_0 et u'_0 étant des fonctions données de y, z et t. »

Prenons, en effet, un cas particulier, celui où les fonctions u_0, u'_0 sont indépendantes de t. Dans ce cas, *si la solution cherchée u est unique*, elle sera certainement indépendante de t. Mais alors l'équation (B) se réduit à (A) et, d'après ce qui précède, le problème de Cauchy sera, en général, impossible.

Reste à savoir s'il ne peut pas exister une infinité de solutions u prenant, ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$, les mêmes valeurs pour $z = 0$. Il est clair que cette question revient à la suivante : L'équation (B) peut-elle admettre une solution u, définie pour $x \geqq 0$ et s'annulant ainsi que $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $x = 0$ (sans que u soit identiquement nul).

Une telle solution u sera définie seulement pour les valeurs positives de x. Mais on pourra étendre sa définition aux valeurs négatives de cette variable, en posant

$$u(-x, y, z, t) = u(x, y, z, t),$$

et une telle extension respectera la continuité de u et de ses dérivées pour $x = 0$.

Dès lors, on pourra considérer la fonction u comme définie par ses valeurs U et les valeurs U′ de sa dérivée par rapport à t, pour $t = 0$, et la représenter par la formule de Poisson, précédemment rappelée. Pour que l'expression ainsi écrite vérifie les conditions initiales données, il faudrait que l'on ait, pour $x = 0$,

(2)

Mais (U) et (U′) sont évidemment des fonctions paires de t. Par conséquent, dans chacune des deux relations précédentes, les deux termes du premier membre devront être nuls séparément. Si l'on remarque encore que l'égalité $\frac{\partial}{\partial t}[(\mathrm{U}).t] = 0$ entraîne $(\mathrm{U}) = 0$, si

l'on suppose (comme c'est le cas ici) U fini pour $t = 0$, on voit que l'on est ramené au problème suivant :

Comment doit être choisie une fonction continue $V(x, y, z)$ *pour que l'intégrale double*

(3)

étendue à la surface de la sphère Σ *qui a pour centre* (O, y_0, z_0) *et pour rayon* t (*autrement dit d'une sphère quelconque ayant son centre dans le plan* $x = 0$), *soit nulle, quels que soient* y_0, z_0 *et* t?

L'une quelconque des fonctions

$$U, \quad U', \quad \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U'}{\partial x}$$

devra vérifier la condition qui précède.

Pour résoudre le problème que nous venons de poser, laissons d'abord la fonction V quelconque et désignons par $\Phi(y_0, z_0, t)$ la quantité (3). Nous pouvons remarquer tout d'abord que la connaissance de la fonction Φ entraîne celle de la fonction

$$\psi(y_0, z_0, t) = \int\int\int V\,dx\,dy\,dz,$$

où l'intégrale est étendue au volume de la sphère Σ. On a

(4) $$\psi(y_0, z_0, t) = \int^t \Phi\,dt.$$

Or, on peut écrire

$$(y - y_0)\,dS,$$

l'intégrale double étant toujours étendue à la surface de Σ. C'est, en effet, ce que l'on reconnaît en considérant la différence des deux intégrales

et

(lesquelles sont deux intégrales triples étendues à deux sphères Σ et Σ' de même rayon, mais de centres différents), comme la différence algébrique de deux intégrales étendues, l'une à la région

extérieure à Σ et intérieure à Σ', l'autre à la région extérieure à Σ' et intérieure à Σ. Il est essentiel d'observer que *ce raisonnement ne suppose pour* V *d'autre propriété que d'être continue.*

On aura de même

D'après cela, si la fonction V est choisie de manière à annuler identiquement $\Phi(y_0, z_0, t)$, elle annulera aussi les quantités

Mais on peut raisonner sur ces dernières comme sur la première et, en continuant ainsi, on voit que l'intégrale

$$V(y -$$

est nulle quels que soient les entiers positifs h et k.

Or, la fonction

$$\mu^2[(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]$$

est (quels que soient les nombres y_1, z_1 et μ) développable en série entière par rapport à $y - y_1$ et $z - z_1$ et uniformément convergente. Si, comme nous le supposons, V est partout fini, on pourra donc écrire

$$\int_{\Sigma} t$$

Mais, si nous faisons tendre μ vers $+\infty$, la limite du premier membre (en supposant que la droite $y = y_1$, $z = z_1$, coupe Σ et désignant par $+x$ l'abscisse du point d'intersection) est, à un facteur indifférent près,

$$V(x_1, y_1, z_1) + V(-x_1, y_1, z_1).$$

Ceci devant être nul pour tous les systèmes de valeurs de x_1, y_1, z_1, *la fonction* V *doit être impaire par rapport à* x.

Inversement, s'il en est ainsi, l'intégrale (3) sera bien nulle.

Revenons maintenant à nos fonctions U, U'. Il résulte de ce qui précède que U est impair par rapport à x, et qu'il en est de même de $\frac{\partial U}{\partial x}$.

Or, si $\frac{\partial U}{\partial x}$ est une fonction impaire, U est une fonction paire. Donc U est identiquement nul.

D'autre part, le même raisonnement s'applique à la quantité U'. Ces deux quantités faisant connaître la solution cherchée u, en vertu de la formule de Poisson, nous avons démontré la proposition suivante :

La seule solution de l'équation (B), *qui, pour* $x = 0$, *satisfasse aux conditions* $u_0 = u'_0 = 0$, *est identiquement nulle.*

Autrement dit, le problème de Cauchy relatif à l'équation (B), avec $z = 0$ comme multiplicité initiale, ne peut être indéterminé. Il en résulte, comme nous l'avons vu, qu'il est en général impossible.

Ceci nous fournit la conclusion que nous nous proposions de mettre en évidence, je veux dire la profonde différence qui existe entre le problème de Cauchy relatif à l'équation (B), la multiplicité initiale étant $t = 0$, et le problème analogue pour le cas où les données initiales sont relatives à $x = 0$. La théorie de ce second problème, bien loin d'être identique à celle du premier, se rapprochera, nous venons de le voir, de la théorie des équations à caractéristiques imaginaires (1).

---

(1) Avant de livrer le présent article à l'impression, j'ai connaissance (HAMEL, *Ueber die Geometrieen in denen die Geraden die Kürzesten sind*, p. 73 et suiv.; Göttingen, 1901) d'une méthode proposée par M. Holmgren pour montrer l'unicité de la solution de certaines équations aux dérivées partielles, et qui s'appliquerait aisément au problème que nous venons de traiter. La méthode donnée dans le texte a été indiquée dans ma *Notice sur mes travaux scientifiques* (Gauthier-Villars, Paris, février 1901).

Note du Comité de rédaction. — On pourra comparer les résultats de ce Mémoire et du suivant à ceux de M. Picard (*Journal de Math.*, 4e série, t. VI, 1890, p. 170). *Voir* aussi E. PICARD : *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivés partielles*, 1927, p. 206-208.

QUELQUES CAS D'IMPOSSIBILITÉ

PROBLÈME DE CAUCHY

(*In Memoriam N. I. Lobacevski*, vol. II, 1926.)

Les travaux de Cauchy et, sous une forme plus claire et plus aisément accessible, la fameuse démonstration de Sophie Kowalewski ont établi un théorème fondamental d'existence pour les équations aux dérivées partielles. En se bornant, pour prendre le cas le plus intéressant, à une équation du second ordre, et en appelant $x, x_1, \ldots, x_n$ les variables indépendantes, ce théorème peut s'énoncer de la manière suivante :

L'équation aux dérivées partielles

$$) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F\left(x, x_i, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial x_i}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

dans laquelle le second membre contient ou peut contenir toutes les variables indépendantes, la fonction inconnue, toutes ses dérivées du premier ou du second ordre, à l'exception de celle qui figure au premier membre, et est holomorphe par rapport à ces quantités, admet une solution holomorphe en x, et une seule, satisfaisant aux conditions initiales

$$\frac{\quad}{\partial x} \qquad\qquad x_n)$$

pour $x=0$, *f et g étant des fonctions holomorphesd onnées* ([1]) *de*

Plus généralement, au lieu de l'hyperplan $x = 0$, on peut considérer une hypersurface

$$(\gamma) \qquad \gamma(x, x_1, \ldots, x_n) = 0$$

et, en chaque point de cette hypersurface, se donner la valeur de l'inconnue z et d'une de ses dérivées premières [convenablement choisie, c'est-à-dire dans une direction non tangente à (γ)]. Le *problème de Cauchy* consistera à trouver une fonction z des variables indépendantes x satisfaisant non seulement à l'équation aux dérivées partielles (équation « indéfinie ») pour toutes les valeurs des x_i, mais en outre, en tous les points de (γ), aux « conditions définies », — ici « conditions de Cauchy », — dont nous venons de parler.

S'il n'y a que deux variables indépendantes x et y, considérées comme coordonnées rectangulaires d'un point du plan, les conditions de Cauchy sont relatives à une certaine courbe (γ) du plan des x, y, et reviennent à dire que la surface représentative de la fonction z cherchée doit passer par une certaine courbe (Γ) de l'espace, — projetée suivant (γ), — et être inscrite suivant cette courbe, à une développable donnée.

En général, les données ainsi spécifiées, jointes à l'équation aux dérivées partielles, permettent de calculer, en un point quelconque de la multiplicité initiale (γ), les dérivées secondes et plus généralement les dérivées des ordres successifs de la fonction z cherchée. Ce calcul est bien connu pour une équation linéaire par rapport aux dérivées secondes r, s, t ou, un peu plus généralement, pour une équation de Monge-Ampère, linéaire par rapport à r, s, t, $rt - s^2$: c'est celui qui est exposé dans les *Leçons sur la Théorie des surfaces* de Darboux ([2]) et dans les *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* de M. Goursat ([3]).

Si, au contraire, et cela en tout point de (γ), la recherche des valeurs numériques des quantités en question devient un problème

([1]) Il y aurait lieu de préciser les domaines dans lesquels les fonctions F, f, g sont supposées holomorphes; mais ce point est sans intérêt pour la suite du présent article.

([2]) Tome III, Livre VII, Chapitre V.

([3]) Tome I, nos 41-45.

indéterminé, c'est que (γ) ou, plus exactement le système de données de Cauchy ainsi considérées, est *caractéristique*. La condition pour qu'il en soit ainsi est, pour l'équation

$$Rr + 2Ss + Tt + H = 0$$

(R, S, T, H fonctions de x, y, z, p, q)

Pour une équation de forme quelconque, la condition est de même forme, mais R, S, T désigneront les dérivées partielles du dernier membre de l'équation par rapport à r, s, t respectivement. L'extension de ce résultat, c'est-à-dire la formation de la condition analogue à (2), pour une équation à un nombre quelconque de variables indépendantes, se fait d'elle-même.

Le théorème de Cauchy-Kowalewski se transporte immédiatement moyennant une transformation ponctuelle, à une multiplicité initiale (γ) quelconque (c'est-à-dire ne correspondant pas en général à $x = 0$) : il exprime alors que le problème de Cauchy correspondant est possible et déterminé du moment que les données n'en sont pas caractéristiques.

Ce théorème, qui s'établit par la méthode bien connue des séries majorantes, — le *Calcul des limites* de Cauchy, — apparaît immédiatement comme l'analogue exact de celui par lequel le grand géomètre a fondé la théorie des équations différentielles ordinaires.

Mais on sait que ce dernier a reçu, tant de Cauchy lui-même que de ses successeurs, des démonstrations appartenant à deux catégories différentes. Les unes prennent comme point de départ le calcul des limites : elles supposent alors l'équation différentielle analytique; les autres (méthode de Cauchy-Lipschitz, méthode de M. Picard) procèdent par approximations successives : on peut les développer en restant exclusivement dans le domaine réel et, dans ce cas, ne supposer en aucune façon l'analyticité de l'équation. Le théorème fondamental de la théorie des équations différentielles ordinaires est donc établi sans qu'on ait, à beaucoup près, à faire cette hypothèse — en réalité, moyennant des conditions très simples et très peu restrictives concernant la forme de l'équation.

Que deviennent ces conclusions lorsqu'on passe des équations différentielles ordinaires aux équations aux dérivées partielles ?

L'existence des caractéristiques constitue évidemment une première particularité entièrement nouvelle et propre à cette seconde théorie.

Supposons maintenant que (γ) ne soit pas une caractéristique. Si, en outre, toutes les données de la question sont analytiques, c'est-à-dire si le premier membre de l'équation aux dérivées partielles est holomorphe par rapport à toutes les quantités qui y figurent, du moins pour toutes les valeurs que ces quantités sont susceptibles de prendre, en vertu des conditions initiales données, le long d'un certain arc de (γ) et s'il en est de même pour le premier membre de l'équation de (γ) avec, par exemple, $\frac{dy}{dx} > 0$ le long du même arc, ainsi que pour les fonctions

$$\partial z$$

qui expriment, dans ce cas, les données de Cauchy, la démonstration de Sophie Kowalewski établit que le problème admet une solution holomorphe et n'en admet qu'une seule.

Cette démonstration est, comme on sait, fondée sur l'emploi du calcul des limites.

On a souvent admis, plus ou moins implicitement, qu'un tel résultat subsiste lorsque les données ne sont plus analytiques; et l'on a même essayé de l'établir par des méthodes d'approximations successives inspirées de celles qui s'appliquent aux équations différentielles ordinaires. De telles méthodes, à la suite des travaux de M. Picard, se sont montrées effectivement fécondes pour l'étude de certains cas étendus et importants du problème. Mais dans le cas général, elles étaient par avance vouées à un échec certain, car le résultat qu'elles avaient pour but de démontrer est inexact.

Une partie semble, jusqu'à nouvel ordre, devoir en subsister. On peut encore dire que le problème de Cauchy (les données étant, bien entendu, supposées non caractéristiques) a, au plus, *une* solution. C'est ce qui a été établi, du moins pour l'équation entièrement linéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à z, p, q, r, s, t, par M. Holm-

gren (¹) lorsque les coefficients sont supposés fonctions analytiques et holomorphes des variables indépendantes. La démonstration n'a pas pu jusqu'ici être étendue au cas des coefficients non analytiques, ou à l'équation non linéaire, de sorte que, rigoureusement parlant, la question reste encore ouverte.

Par contre, on peut affirmer que pour les équations à caractéristiques imaginaires (cas *elliptique*), soit $RT - S^2 > 0$, ou à caractéristiques confondues (cas *parabolique*, $RT - S^2 = 0$), le problème de Cauchy est en général *impossible* lorsque les données ne sont plus supposées analytiques.

Considérons la plus connue des équations du type elliptique, l'équation des potentiels

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\ldots} + \frac{\partial^2 z}{\ldots}$$

Il est tout d'abord une sorte de problème de Cauchy correspondant à cette équation, et dont l'impossibilité est bien connue. C'est la question qui consiste à déterminer une solution z de l'équation dans une aire déterminée du plan de manière à ce que z d'une part, et sa dérivée normale de l'autre, prennent des valeurs assignées d'avance en chaque point de la frontière. On sait que, si la solution cherchée doit être régulière dans toute l'aire en question, on n'a le droit de choisir arbitrairement, le long de la frontière, qu'une seule des valeurs numériques précédentes, celle de z (problème de Dirichlet) ou celle de la dérivée normale (problème de Neumann); et, de fait, il est aisé de former une infinité de relations auxquelles doivent satisfaire les données de Cauchy le long du contour frontière pour qu'une solution de l'espèce considérée puisse subsister.

Mais ceci n'est pas une réponse décisive à la question posée. Nous venons en effet de nous placer dans des conditions très différentes de celles que considère le raisonnement classique de Sophie Kowalewski, puisque nous venons de parler d'une solution définie, non seulement aux environs de tout le contour qui porte les données, mais dans toute l'aire limitée par ce contour, en l'astreignant à être dépourvue de toute singularité dans tout l'intérieur de cette aire. Le théorème fondamental de Cauchy-Kowalewski ne prétend au

(¹) *Offersigt af Kongl. Vetensk. Akad. Förh.*, 9 janvier 1901, p. 91-105.

contraire, définir la solution que dans un voisinage convenablement choisi de la multiplicité initiale et même [1] d'une portion, elle-même suffisamment petite, de cette multiplicité initiale.

Il convient donc de prendre la question sous ce même point de vue, et de la poser exactement comme Cauchy, à ceci près que les données ne seront plus supposées analytiques. Cherchons donc, pour l'équation (3), une solution z qu'il ne nous incombera de définir que pour les valeurs suffisamment petites de x et pour les valeurs de y comprises dans un intervalle suffisamment petit (y_1, y_2). C'est en particulier, seulement dans cet intervalle (y_1, y_2) de variation de y que seront imposées, pour $x = 0$, les conditions de Cauchy

$$\partial z$$

Ce n'est pas tout : les problèmes de cette espèce exigent, pour être posés d'une manière nette, des spécifications complémentaires sur lesquelles les auteurs n'ont peut-être pas toujours assez insisté, malgré les remarques fondamentales que contient sur ce point la Thèse de M. Painlevé [2].

Se proposera-t-on de trouver une solution z définie des *deux* côtés de la droite $x = 0$, de telle manière que le segment considéré de cette droite (ou, si l'on veut, tout segment strictement intérieur à celui-là) soit *intérieur* au domaine d'existence de z ? Dans ce cas, la question serait immédiatement jugée dans le sens de la négative. On sait, en effet, que, à l'intérieur de son domaine d'existence, une fonction harmonique est analytique par rapport aux variables dont elle dépend. Dans ces conditions, il est clair que le problème de Cauchy tel que nous venons de le poser est nécessairement impossible si les fonctions f et g ne sont pas toutes deux analytiques.

La question n'existe donc qu'en ce qui concerne une solution définie d'un seul côté de la droite $x = 0$, laquelle sera en général frontière de son domaine d'existence. On voit donc que tout système

[1] Rappelons toutefois que, à cet égard, le résultat a été complété par les recherches de M. Goursat (*Bull. Soc. Math. franç.*, t. XXXIV, 1906, p. 85-108).

[2] *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques*, 1887, p. 19-21.

de données de l'espèce précédente pose *deux* problèmes de Cauchy, l'un dans la région $x > 0$, l'autre dans la région $x < 0$.

De plus, le sens des conditions aux limites imposées à z doit évidemment être précisé. Celui qu'il faut attribuer aux mots : « z doit prendre les valeurs $f(y)$ pour $x = 0$ », l'a été par M. Painlevé dans le travail cité, et nous conviendrons qu'une précision analogue s'applique à la fonction $\frac{\partial z}{\partial x}$. Si nous entendons les choses ainsi, les fonctions z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ devront être continues par rapport à l'ensemble des deux variables x et y dans le domaine $0 < x < \alpha$ (ou $0 > x > -\alpha$), $y_1 + \varepsilon < y < y_2 - \varepsilon$, α et ε étant des nombres positifs convenablement choisis. Ceci implique en particulier que les fonctions f et g devront être données continues.

Quant aux dérivées d'ordre supérieur, leur existence peut être ou non supposée à la frontière, c'est-à-dire sur la droite $x = 0$ elle-même; mais pour x non nul, l'existence même de l'équation, à moins de nouvelles conventions sur le sens qu'il faut lui attribuer, suppose implicitement l'existence de deux au moins d'entre elles,

$$\text{et} \qquad \frac{\qquad}{\partial y^2}.$$

Quoi qu'il en soit de cette dernière condition, on peut, comme je l'ai montré récemment [1], décider la question, pour notre équation du potentiel, d'une manière tout à fait intuitive et qui ne fait intervenir au fond que le principe mentionné tout à l'heure de l'analyticité des solutions. Ce principe a, en effet, été précisé [2] de la manière suivante :

Si deux fonctions harmoniques z_1, z_2, *définies respectivement dans deux domaines* D_1, D_2 *adjacents l'un à l'autre suivant un arc frontière commun* L, *ont en chaque point de cet arc même valeur numérique et même dérivée suivant la normale à* L, *elles forment par leur ensemble une fonction harmonique unique, régulière* (et, par conséquent, *analytique*) *dans le domaine* $D_1 + D_2$.

(1) *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, New-Haven-London, 1923, Chap. I.

(2) *Voir* Duhem, *Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique*, t. I, p. 168-169.

Or, il ressort déjà de là que, si les fonctions $f(y)$ et $g(y)$ ne sont pas toutes deux analytiques, *il ne peut jamais arriver que le problème de Cauchy correspondant soit à la fois possible des deux côtés de la droite frontière* $x = 0$, puisque, alors, l'ensemble des deux solutions obtenues relèverait nécessairement du théorème que nous venons d'énoncer.

C'est déjà dire que l'impossibilité du problème est le cas général puisque, des deux problèmes tout analogues qui se posent respectivement des deux côtés de notre droite (ou même d'une ligne quelconque), il y en a au moins un pour lequel cette impossibilité se présente.

Peut-on établir en toute rigueur qu'elle a lieu, sauf dans des cas à déterminer, pour chacun des deux problèmes en question, et non pas seulement pour l'un d'entre eux ? C'est ce qui est aisé dans le cas où nous venons de nous placer, celui où la multiplicité initiale est la droite $x = 0$. Supposons d'abord que l'une des fonctions f, g soit nulle. Si c'est, par exemple, la première, c'est-à-dire si z doit être nul avec x, cette quantité, supposée définie pour $x = 0$, pourra l'être également dans la région $x \neq 0$ à l'aide de la relation

et ce prolongement se fera avec continuité de z et de sa dérivée par rapport à x. Nous sommes dès lors ramené au cas précédent, et l'on voit que, *lorsque f est nul, le problème de Cauchy* (et même *chacun des deux problèmes de Cauchy*) *est impossible dès que g n'est pas analytique.*

Soit maintenant f quelconque (non analytique, sans quoi la réponse serait évidemment encore la même) nous pouvons immédiatement indiquer une fonction harmonique qui se réduise à $f(y)$ pour $x = 0$, à savoir, au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, le potentiel logarithmique de double couche de densité f étalée sur notre droite. Toute autre solution de l'équation prenant sur cette droite les mêmes valeurs se déduit de la première par addition d'une fonction nulle avec x, donc, comme nous venons de le voir, d'une fonction analytique en x et y dans le voisinage de $x = 0$.

Ainsi, *pour la possibilité du problème, la fonction $g(y)$ doit être le*

produit de $\frac{1}{\pi}$ par la dérivée normale du potentiel logarithmique de double couche de densité f, ou ce produit augmenté d'une fonction analytique de y.

Ce résultat, avec sa démonstration, s'étend de lui-même $\left(\text{au remplacement près des potentiels logarithmiques par les potentiels newtoniens et du facteur } \frac{1}{\pi} \text{ par } \frac{1}{2\pi}\right)$ à l'équation des potentiels dans l'espace, ou même dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Dans le plan, il s'étend également sans difficulté au cas où la droite $x = 0$ est remplacée par un arc analytique régulier quelconque : il suffit évidemment de passer de cet arc à une droite par une transformation conforme. Sur un tel arc, la distribution des valeurs de la dérivée normale $\frac{dz}{dn}$ devra donc être analytique s'il en est ainsi pour les valeurs de z lui-même; dans le cas contraire, on peut, par exemple, adjoindre à l'arc donné un autre arc de même extrémité de manière à délimiter une certaine aire S, résoudre, pour cette aire, le problème de Dirichlet avec les valeurs données de z sur l'arc donné et des valeurs arbitraires sur le reste du contour; on aura ainsi une distribution possible de valeurs de la dérivée normale et, d'après ce qui précède, toute autre distribution rendant le problème possible (même d'un côté de l'arc donné) se déduira de celle-là par l'addition de valeurs distribuées analytiquement.

Par contre, ce mode de démonstration ne s'étendrait pas à une surface analytique de l'espace, puisque, en dehors du cas d'une sphère, une telle surface ne peut pas être ramenée à un plan par transformation conforme. Il ne s'étendrait pas, même dans le plan, à une équation du type elliptique autre que celle du potentiel. La première partie de notre raisonnement subsistant alors seule, nous pouvons seulement affirmer que, *si l'une des données est distribuée analytiquement, et non l'autre, le problème de Cauchy n'est possible tout au plus que d'un seul côté de la frontière (analytique) donnée.*

Mais on peut arriver à exclure même cette possibilité unilatérale en s'inspirant de la première méthode que nous avons proposée [1]

[1] *Bulletin de l'Université de Princeton*, t. XIII, 1902.

pour résoudre cette question. L'équation aux dérivées partielles étant une équation linéaire quelconque du second ordre appartenant au type elliptique et à coefficients analytiques, complétons encore la frontière donnée (γ) (convenablement limitée en tous sens, au besoin) par une autre (γ'), de manière à délimiter un domaine fini D. Si, comme nous avons le droit de le supposer, ce domaine est suffisamment peu étendu dans toutes ses dimensions, une fonction z prenant des valeurs données sur (γ) sera déterminée si l'on se donne en outre ses valeurs sur (γ'). La théorie du problème de Dirichlet ainsi posé est aujourd'hui fort avancée, et des recherches de ces dernières années, exposées dans un récent article (¹) dont je dois l'obligeante communication à M. Lichtenstein, ressort la possibilité de lui faire suivre une marche tout analogue à celle que l'on doit aux travaux de Neumann et de M. Fredholm dans la théorie du potentiel ordinaire. Si [en particulier, dans un travail de M. Sternberg annoncé dans l'article ci-dessus mentionné de M. Lichtenstein (p. 1300) et dont je n'ai pu prendre connaissance jusqu'ici], cette analogie a pu être rendue complète, c'est-à-dire si le problème est ramené à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm

$$\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} = f_{\mathrm{M}} \qquad \left[\mathrm{K}(\mathrm{M}, \mathrm{P}) = k \frac{d}{d\nu_{\mathrm{P}}} u(\mathrm{M}, \mathrm{P}\right.$$

ayant pour noyau, à un facteur numérique k près dépendant du nombre des dimensions, la dérivée transversale (²) de la solution élémentaire (³) u de l'équation, la démonstration que nous avons en vue s'ensuit sans difficulté, par la voie indiquée dans mon Mémoire *Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées* (⁴). Le noyau étant analytique par rapport aux coordonnées qui définissent la position du point M, la formule de Fredholm montre qu'il en sera de même de la solution de l'équation intégrale, c'est-à-dire de la densité du potentiel de double couche

$$z_{\mathrm{M}} = k \int \rho_{\mathrm{P}} \frac{d}{d\nu_{\mathrm{P}}} u(\mathrm{M}, \mathrm{P})\, d\sigma_{\mathrm{P}} \tag{4}$$

(¹) *Encyklopädie der Math. Wiss.*, 2ᵉ édition, 1924.

(²) Dérivée *conormale* de M. D'Adhémar. Voir nos *Lectures on Cauchy's problem*, etc., Livre II, Chap. II, nº 40.

(³) *Lectures on Cauchy's problem*, etc., Livre II, Chap. III.

(⁴) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXXIII, 1908.

qui, M étant pris quelconque dans D, représentera la solution du problème de Dirichlet.

Le raisonnement par lequel M. Bruns (1) démontre l'analyticité d'un potentiel de double couche étendue sur une surface analytique et à densité analytique, donc aussi l'analyticité de sa dérivée normale en un point de la couche attirante, s'étend de lui-même à toute expression telle que (4) déduite d'une équation linéaire à coefficients analytiques.

Un problème de géométrie bien connu relève du problème de Cauchy pour une équation du type elliptique : c'est celui qui consiste à trouver une surface minima Σ passant par une courbe donnée et inscrite suivant cette courbe à une développable donnée.

La solution bien connue de Schwarz (2) suppose bien les données analytiques, puisqu'elle repose sur l'extension au domaine complexe de fonctions supposées données dans le domaine réel.

En fait, le problème, conformément à la solution antérieure donnée par O. Bonnet (3) se ramène immédiatement au problème de Cauchy pour l'équation (3). La représentation sphérique de la surface cherchée en constitue une représentation conforme et, si ξ, η désignent des coordonnées isothermes sur la sphère (par exemple les coordonnées rectangulaires d'une projection stéréographique de cette sphère), les coordonnées rectangulaires x, y, z de la surface minima Σ sont des fonctions harmoniques de ξ et de η. A la développable donnée à laquelle Σ est assujettie à être inscrite correspondra,

(1) *Journal de Crelle*, t. LXXXI, 1877, p. 349. *Voir* aussi notre Mémoire ci-dessus cité sur l'équilibre des plaques élastiques.

(2) Schwarz, *Miszellen aus dem Gebiete der Minimalflächen*, *Journal de Crelle*, t. LXXX, 1878, p. 280 (*Gesammelte Abhandlungen*, t. I, p. 168). Voir les *Leçons sur la théorie des surfaces*, de Darboux, t. I, Livre III, Chap. VIII.

(3) La solution d'O. Bonnet (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. XL, 1855, p. 1107 et t. XLII, 1856, p. 532; *voir* Darboux, *loc. cit.*) ainsi qu'il était naturel au temps où elle a été obtenue, repose sur le calcul de deux fonctions l'une de ξ, l'autre de η, sans spécifier explicitement si ces quantités sont connues sur une ligne du plan complexe ou dans toute une aire finie de ce plan. En fait, c'est le second cas qui est réalisé : la solution d'O. Bonnet s'applique à la recherche d'une surface minima remplissant les conditions données en tout point *réel* ou *imaginaire* de la ligne (c).

La solution de Bjorling (*Grünert Archiv*, t. IV, 1844) appelle les mêmes observations, avec un peu plus de complication dans les calculs.

sur la sphère, une ligne connue (γ); à chaque point de celle-ci correspondront des valeurs connues de x, y, z et aussi des valeurs connues de leurs dérivées suivant une direction normale à (γ) et tangente à la sphère : ces dernières se déduiront des quantités analogues prises sur la surface minima [à savoir des cosinus directeurs de la normale n à la ligne donnée (c) tracée dans le plan tangent à la développable] en tenant compte du rapport de similitude de la représentation conforme au point considéré, lequel est égal au rapport des arcs correspondants de (c) et de (γ). Ainsi, x, y, z, *fonctions harmoniques de* ξ *et de* η *seront définies par des conditions de Cauchy données en chaque point de* (γ).

Dès lors, d'après ce qui précède, si cette ligne (γ) est analytique, c'est-à-dire *si le cône directeur de la développable* D *est analytique, il faudra, pour la possibilité du problème, que la ligne* (c) *le soit également* [moyennant quoi il en sera de même pour la correspondance entre ces deux lignes et, par conséquent, pour x, y, z considérés comme fonctions de l'arc de (γ)].

Toutes les circonstances que nous avons notées en parlant précédemment du problème de Cauchy pour les fonctions harmoniques doivent évidemment se retrouver dans le problème actuel qui se ramène au premier. Si donc les lignes (c), (γ) sont fermées, la première devant constituer le contour d'une portion régulière de la surface, il n'est pas étonnant que le problème correctement posé — à savoir le problème de Plateau — soit à celui qu'a résolu Schwarz ce qu'est le problème de Dirichlet au problème de Cauchy. Dans ce cas, également, il est clair qu'on pourra écrire, abstraction faite de l'analyticité telle que nous venons de la constater, une infinité de conditions de possibilité déduites des équations générales

$$\int\left(\mathrm{V}\frac{dx}{d\mathcal{N}}-x\frac{d\mathrm{V}}{d\mathcal{N}}\right)d\sigma=\int\left(\mathrm{V}\frac{dy}{d\mathcal{N}}-y\frac{d\mathrm{V}}{d\mathcal{N}}\right)d\sigma=\int\left(\mathrm{V}\frac{dz}{d\mathcal{N}}-z\frac{d\mathrm{V}}{d\mathcal{N}}\right)d\sigma=0,$$

dans lesquelles V est n'importe quelle fonction harmonique et régulière en ξ, η et dont les premiers membres, intégrales curvilignes étendues à la projection stéréographique ($\mathcal{N}$ désignant la normale et σ l'arc de cette projection), peuvent également être considérés comme relatifs à (γ) elle-même et peuvent aussi s'écrire

$$\int_{(c)}\left(\mathrm{V}\frac{dx}{dn}-x\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)ds,\quad \int_{(c)}\left(\mathrm{V}\frac{dy}{dn}-y\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)ds,\quad \int_{(c)}\left(\mathrm{V}\frac{dz}{dn}-z\frac{d\mathrm{V}}{dn}\right)ds,$$

puisque la projection stéréographique, l'aire sphérique et la portion de surface minima dérivent les unes des autres par des transformations conformes et que, dans chacune de celles-ci, ds et dn sont multipliés dans le même rapport. Les plus simples de ces conditions ne sont autres que les relations d'équilibre

$$\int \cos(n, x)\, ds = \int \cos(n, y)\, ds = \int \cos(n, z)\, ds = 0,$$

$$\int [y\cos(n, z) - z\cos(n, y)]\, ds = \int [z\cos(n, x) - x\cos(n, z)]\, ds$$
$$= \int [x\cos(n, y) - y\cos(n, x)]\, ds = 0,$$

fournies par la théorie de la capillarité pour une système de tensions superficielles distribuées uniformément le long de (c). On voit que, plus généralement, X, Y, Z désignant les coordonnées rectangulaires d'une seconde surface minima en correspondance par plans tangents parallèles avec la première, si (C) désigne, sur cette seconde surface, la ligne qui a même représentation sphérique que (c), on a [en tenant compte cette fois du rapport de similitude entre les deux surfaces minima, égal au rapport d'un arc dS de (C) à l'arc correspondant ds de (c), et en désignant par N la normale à (C) située dans le plan tangent à la seconde surface]

$$\int \left[\mathrm{X}\cos(n, x) - x\frac{d\mathrm{S}}{ds}\cos(\mathrm{N}, x)\right] ds$$
$$= \int \left[\mathrm{Y}\cos(n, y) - y\frac{d\mathrm{S}}{ds}\cos(\mathrm{N}, y)\right] ds = \ldots = 0.$$

Toutefois, ces dernières relations supposent non seulement que les contours (C), (c) tracés sur les deux surfaces ont même représentation sphérique, mais encore qu'il en est de même des aires limitées respectivement par ces contours. Si donc parmi les diverses aires sphériques (à un ou plusieurs feuillets) qui ont une frontière commune, on ignore celle qui doit servir de représentation sphérique à la portion de surface cherchée toute surface minima lieu du point (X, Y, Z) fournira plusieurs systèmes (5) (parfois en nombre infini) dont l'un doit être vérifié le long du contour donné.

Le problème de la déformation des surfaces dépend, comme on sait, non d'une équation linéaire, mais d'une équation de Monge-

Ampère

$$A(rt - s^2) + Br + 2Cs + B't + D = 0 \tag{6}$$

(A, B, B′, C, D fonctions de x, y, z, p, q).

Le type auquel appartient une équation de cette espèce dépend du signe de la quantité

$$(At + B)(Ar + B') - (As - C)^2 = BB' - C^2 - AD.$$

Pour l'équation spéciale dont dépend la transformation, les caractéristiques n'étant autres que les lignes asymptotiques, sont réelles et distinctes alors, et alors seulement, que la courbure totale est négative. L'équation appartient au type elliptique, soit

$$BB' - C^2 - AD > 0,$$

si, au contraire, l'élément linéaire considéré est celui d'une surface convexe. C'est donc dans ce dernier cas que nous nous placerons ici. M. Serge Bernstein [1] a démontré l'analyticité des solutions d'une équation du second ordre du type elliptique (à coefficients analytiques) sous la condition que la solution considérée admette des dérivées partielles jusqu'au troisième ordre bornées.

Soit dès lors, pour une telle équation, un problème de Cauchy relatif à une ligne frontière analytique, les données étant dérivables jusqu'au troisième ordre et astreignons la solution à avoir, jusqu'au troisième ordre, des dérivées bornées, ce qui entraîne que les dérivées premières et secondes doivent être continues jusques et y compris la ligne frontière, chacune d'elles, r ou s, par exemple, devant prendre (au sens précédemment précisé) une valeur parfaitement déterminée en chaque point de cette ligne. S'il en est ainsi, les égalités

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy$$

devront avoir lieu sur la ligne en question elle-même. Or, ce sont elles qui interviennent dans le calcul précédemment rappelé (Darboux, Goursat, *loc. cit.*) : jointes à l'équation, celle-ci étant supposée du

[1] Voir *Math. Ann.*, t. 59, 62, 69; *Communication de la Société Math. de Kharkow*, t. XI; *C. R. Acad. Sc., Paris*, 13 mai 1907.

type (6) qui nous intéresse ici, elles déterminent d'une façon parfaitement univoque les valeurs de r, s, t puisque, par hypothèse, il ne peut s'agir d'une caractéristique.

Supposons maintenant que le problème de Cauchy en question puisse être résolu, dans les conditions indiquées, de chaque côté de la ligne frontière (γ) donnée : on voit que les deux solutions ainsi définies de part et d'autre de (γ) se raccorderont le long de cette ligne avec continuité des dérivées premières et secondes. D'après le résultat de M. S. Bernstein, elles ne formeront dès lors qu'une seule fonction analytique, ce qui est impossible si les fonctions qu'expriment les données de Cauchy ne sont pas elles-mêmes analytiques. Ici encore, on peut affirmer que l'un au moins des deux problèmes partiels sera, en général, impossible (du moins sous les conditions imposées aux dérivées secondes et troisièmes), et il est évidemment à présumer qu'ils le seront en général tous les deux, mais sans que, cette fois, nous ayons le moyen d'apporter plus qu'une présomption et d'indiquer des conditions nécessaires de possibilité unilatérale.

Le problème de Cauchy est, comme on le sait [1], celui auquel on est conduit lorsqu'on cherche à déformer une surface de manière à ce qu'une ligne donnée tracée sur celle-ci vienne sur une ligne donnée de l'espace. Les considérations précédentes s'appliquent en particulier aux deux cas les plus intéressants étudiés jusqu'ici spécialement, — celui de la sphère et celui du paraboloïde de révolution — puisqu'il s'agit, dans chacun d'eux, de surfaces convexes (du moins si la sphère ou le paraboloïde sont réels).

M. Lichtenstein [2] a amélioré le résultat de M. S. Bernstein par l'adoption d'hypothèses moins restrictives relativement aux dérivées, mais seulement pour des équations provenant du calcul des variations, lesquelles, en particulier, sont forcément linéaires par rapport à r, s, t, sans terme en $rt - s^2$. La question de savoir si, pour l'équation de Monge-Ampère, on peut démontrer encore l'impossibilité du problème sans imposer à la solution toutes les conditions auxquelles nous l'avons astreinte, reste donc réservée.

(1) DARBOUX, *Leçons*, t. III, Livre VII, Chap. V, n° 718.

(1) *Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1913, p. 915.

Pour terminer, après avoir rappelé que des circonstances de même nature se présentent pour les équations du type parabolique et même pour les équations du type hyperbolique ([1]), correspondant, les premières à la théorie, déjà si parfaite, des fonctions quasi analytiques, les secondes, au contraire, à des questions non encore élucidées et qui sont propres aux fonctions de plusieurs variables sans analogues pour une variable unique, rappelons aussi qu'elles ont leur répercussion sur les propriétés de la solution du problème, même lorsque celui-ci est possible.

L'exemple le plus simple nous sera fourni par le problème des surfaces minima, étant donné qu'il se ramène à l'équation des potentiels logarithmiques, que j'ai traitée, à ce point de vue, dans mes Leçons de Yale ([2]). Le résultat obtenu en cet endroit entraîne la conséquence suivante : soient données successivement deux courbes (c), (c') analytiques et, par chacune d'elles, une développable également analytique, de sorte que, les formules de Schwarz étant applicables, et le problème de Cauchy qu'elles résolvent, possible dans les deux cas, on définit ainsi deux portions Σ, Σ' de surfaces minima. Supposons que les deux développables aient même cône directeur et correspondent, par conséquent, à une courbe sphérique unique (γ), les deux courbes (c), (c') ayant entre elles des écarts très légers et d'allure sinusoïdale. Si imperceptibles que soient ces écarts, si étroit que soit le voisinage des deux courbes, et il peut s'agir d'un voisinage d'ordre (au sens de Zermelo) aussi élevé qu'on voudra, les formes des deux surfaces Σ, Σ' obtenues pourront être complètement différentes, sans le moindre rapport entre elles : il suffira que les oscillations relatives des deux courbes aient une période suffisamment petite.

([1]) *Lectures on Cauchy's problem*, Livre I, Chap. II, n° 16 et Livre IV, Chap. I, n°s 158-161.

([2]) *Lectures on Cauchy's problem*, Livre I, Chap. II, n° 18.

CALCUL DES VARIATIONS

ET

CALCUL FONCTIONNEL

SUR UNE MÉTHODE

DE

CALCUL DES VARIATIONS

(*Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 1127-1129.)

Les importantes méthodes que l'on doit à M. Hilbert pour l'étude des problèmes du Calcul des variations permettent d'affirmer, dans des cas très étendus, l'existence de la solution. M. Hilbert n'a, d'ailleurs, pas visé d'autre but et n'a pas entendu fournir un procédé de calcul si théorique soit-il.

Je voudrais indiquer ici, pour arriver au même résultat, une autre manière d'opérer qui n'abdique pas toute prétention à cet égard. Elle ne constitue certes pas plus une méthode pratique de calcul que ne le font les autres démonstrations d'existence classiques en calcul intégral. Mais, au moins dans certains cas, elle ne leur est pas inférieure sous ce point de vue : elle permet, à la rigueur, le calcul numérique et, en tout cas, l'étude analytique des solutions.

Je m'adresserai à l'exemple le plus simple, celui de l'intégrale

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{I}.$$

La variation première est, en employant la transformation de du Bois-Reymond et désignant par h une constante arbitraire,

$$\delta \mathrm{I} = \int_0^a \left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}\, dx - h \right) \delta y'\, dx = \int_0^a \mathrm{Q}\, \delta y'\, dx;$$

le symbole δ désignera ici une dérivée partielle par rapport au para-

mètre auxiliaire α. Posons

$$\delta y = \int_0 \delta y' \, dx,$$

ρ étant positif (nous le supposerons, pour le moment, constant) et h étant déterminé de manière à rendre Q nul pour $x = a$.

Si la fonction f admet, comme nous le supposons, des dérivées successives satisfaisant à la condition de Lipschitz, le système (2) s'intègre sans difficulté, par approximations successives, à la façon des équations différentielles ordinaires, en supposant que l'on donne la *courbe initiale*, c'est-à-dire la valeur de y, en fonction de x pour $\alpha = 0$.

Si cette valeur initiale admet une dérivée seconde par rapport à x, il en est de même de la valeur de y pour une valeur quelconque de α, et l'on a (pour ρ constant)

$$\delta y'' = -\rho[A y'' - \varphi(x, y, y')],$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\quad}, \qquad \varphi(x, y, y') = \frac{\partial f}{\partial y} - y' \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y' \, \partial x}.$$

Quant à δI, il a la valeur toujours négative

$$\delta I = -\int_0^a \rho Q^2 \, dx.$$

Bornons-nous maintenant aux fonctions positives f qui (outre les hypothèses de régularité précédentes) vérifient les conditions suivantes :

1. A est positif et, même pour $y' = +\infty$, admet une limite inférieure positive.

2. Le rapport $\frac{\varphi^2}{f}$ admet une limite supérieure déterminée (même pour $y' = +\infty$).

Il en est ainsi, par exemple, pour $f = \frac{1}{2}[A(x) y'^2 +$

I. Supposons encore que :

3. L'expression

c'est-à-dire la variation seconde débarrassée des termes en $\delta^2 y$, $\delta^2 y'$,

est toujours positive et même (conformément aux conclusions bien connues de Scheeffer et de Kneser) dans un rapport non infiniment petit avec son premier terme $\int_0^a \mathrm{A}\, \delta y'^2\, dx$.

Alors $\delta^2 \mathrm{I}$ sera toujours positif et supérieur à $-\mathrm{K}\, \delta \mathrm{I}$, K étant un nombre fixe.

Donc, pour α infiniment grand, $\delta \mathrm{I}$ tend vers zéro suivant une loi exponentielle, et l'on trouve qu'il en est de même (quel que soit x) pour $\delta y'$, grâce à ce fait (conséquence de l'hypothèse 2) que $\int y''^2\, dx$ et $\int y''\, dx$ restent finis.

Ainsi y et y' *tendent, pour* $\alpha = +\infty$, *vers des limites qui vérifient les conditions du problème.* — On a même une limite supérieure de l'erreur commise, tant sur y que sur y', en s'arrêtant à une valeur déterminée de α.

On déduit de là que *la solution du problème est unique*, ce qui ne ressortait pas des méthodes classiques.

II. Si l'on abandonne l'hypothèse 3, on constate encore que $\delta y'$ tend uniformément vers zéro; mais on ignore, *a priori*, suivant quelle loi. Néanmoins, la fonction y' tend encore, soit vers une limite déterminée, soit vers une infinité de limites qui toutes annulent la variation première. Ce second cas serait évidemment exceptionnel; il ne pourrait se présenter que s'il passait une infinité d'extrémales par les deux points donnés. Il est d'ailleurs à présumer que même alors (au moins en ne prenant plus la quantité constante ρ et en la choisissant convenablement) la limite serait unique; et que, en général, l'hypothèse 3 serait vérifiée pour α suffisamment grand.

L'hypothèse 1, au moins pour y' fini, est évidemment dans la nature des choses. Quant à l'hypothèse 2 et à l'hypothèse 1 pour y' infini, elles deviendront inutiles lorsqu'on prendra l'intégrale sous forme paramétrique.

Au reste, il conviendra d'étudier de plus près l'application de cette méthode, non à des exemples justiciables, comme le précédent, de procédés élémentaires, mais à des problèmes moins aisés à élucider directement.

SUR LA VARIATION

DES

INTÉGRALES DOUBLES

(*Comptes rendus*, t. 144, 1907, p. 1092-1093.)

Il avait été impossible, jusqu'ici, pour le cas des intégrales doubles, de démontrer que les solutions des problèmes de calcul des variations à données analytiques sont également analytiques, et même de démontrer, pour ces solutions, l'existence des dérivées secondes, c'est-à-dire de réfuter l'objection bien connue de du Bois-Reymond.

Dans une élégante Note publiée aux *Comptes rendus* du 29 avril [1], M. Goldzieher s'est attaqué à ces deux questions si intéressantes, dont la seconde, en particulier, est fondamentale, puisqu'elle vise la mise en équation du problème proposé elle-même.

Malheureusement, cette double question est moins simple que le travail de M. Goldzieher ne permettrait de l'espérer.

Cela tient à ce que l'*inégalité*

ne suffit pas au but proposé.

En ce qui concerne l'analyticité des solutions, le fait est bien connu : il revient à dire que les équations du second ordre à caractéristiques réelles admettent des solutions non analytiques.

[1] Page 887.

Mais il en est de même en ce qui concerne l'existence des dérivées secondes. Soit, par exemple,

$$I = \int\int (p^2 - q^2)\, dx\, dy.$$

La variation première δI s'annulera toutes les fois que la fonction z sera de la forme

$$z = f(x+y) + \varphi(x-y),$$

f et φ admettant des dérivées premières, mais non nécessairement des dérivées secondes.

En un mot, *cette variation peut s'annuler sans que la fonction inconnue vérifie l'équation du second ordre correspondante.*

L'objection de du Bois-Reymond est fondée en fait.

Pour la réfuter, il faut nécessairement admettre, non seulement l'inégalité (b), mais l'inégalité plus restrictive

$$(a) \qquad F_{pp}F_{qq} - F_{pq}^2 > 0.$$

On serait alors conduit, comme on le voit en prenant le cas particulier de $F = p^2 + q^2$, à généraliser les délicates recherches que l'on doit à M. Goursat sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques.

L'insuffisance de la condition (b) montre que les difficultés dont a su triompher M. Goursat se retrouvent toutes dans la question actuelle.

ON

ORDINARY RESTRICTED EXTREMA

IN

CONNECTION WITH POINT TRANSFORMATIONS

(*Bulletin of the American Mathematical Society*,

1. *Restricted Minima in a Plane.* — The question which I shall examine concerns the maximum or minimum of $f(x, y)$, when the variables x and y are not independent, but subjected to the condition

$$(g) \qquad\qquad) = 0,$$

so that the point (x, y) must describe the curve represented by the preceding equation.

This is what was called, formerly, a *relative* extremum, but what I proposed to call a *restricted* [1] extremum, because the term « relative » is used with another meaning. Indeed, the extrema which we consider, as every extremum treated by the methods of differential calculus, are *relative*, that is, they are extrema only in comparison with neighboring values of f.

[1] The author informs the editors that he, together with David Hilbert and others, had previously agreed that a change of nomenclature is desirable, to replace the older term relative extrema. The agreement is to use *extremum libre ou lié* in French, and *freies oder gebundenes Extremum* in German. The author had used *bound* in English, and the editors have suggested the word *restricted*. THE EDITORS.

The first part of the question, namely, the investigation of stationary values of f on the curve (g), is quite classic. It is usually solved, with the help of the Lagrange multiplier l, by means of the simultaneous equations

$$p + lp_1 = 0, \qquad q + lq_1 = 0,$$

where p and q are the partial derivatives of f, and p_1 and q_1 are those of g. However, we shall use here the condition with l eliminated, that is,

so that j is the jacobian of f and g. A point $m(x_0, y_0)$ of (g) at which f is stationary on (g) necessarily belongs to the curve defined by (j). We shall suppose, throughout this paper, that m is an ordinary point of (g) and of (j). At m, the curve $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ is tangent to (g).

This settles the question of stationary values. But there remains the question whether such a value, when once found, is a maximum or a minimum. This, of course, can be answered easily if we begin by imagining that x and y, the coordinates of an arbitrary point of (g), are expressed in terms of a variable parameter u. A maximum or a minimum will occur, according to the sign of $\frac{d^2 f}{du^2}$. Then, expanding the latter derivative and taking account of the fact that

$$dg = p_1\, dx + q_1\, dy = 0, \qquad d^2 g = 0,$$

since the point (x, y) must describe the curve (g), it is easily found that the sign involved is that of

$$(2) \qquad (r + lr_1)q_1^2 - 2(s + ls_1)p_1 q_1 + (t + lt_1)p_1^2,$$

where r, s, t denote second derivatives of f, and r_1, s_1, t_1 denote second derivatives of g.

But it is worth while to notice that an equivalent, completely different solution may be obtained by the study of the point transformation

$$(\mathrm{T}) \qquad Y = g(x, y),$$

in the neighborhood of m.

At m itself, the jacobian j of that transformation vanishes, and the curve (j) divides the plane (or, more exactly, the region surrounding m) into two parts σ and σ', the first of which will correspond to $j > 0$, the second to $j < 0$. Now, we know [1] that, in the XY plane, these two regions will have images located on *one and the same side* of the line (J) which corresponds to (j) : we can say that, in the vicinity of the point M, which is the image of m, the images of σ and σ' only give one area R, limited by (J).

In order to solve the given question, we need only inquire whether a direction issuing from M and having α, β for its directing cosines, is directed towards the inside of R.

Let us call *direction parameters* of a direction, any two quantities proportional to the direction cosines of that direction, *with a positive coefficient of proportionality.* In particular, the normal to (j) at m, directed towards the inside of σ, will admit of direction parameters equal to the partial derivatives of j.

$$P = \frac{\partial j}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial j}{\partial y}.$$

Then let us consider the direction tangent to (j), directed with respect to σ. It will admit of the direction parameters Q, — P, so that an infinitesimal displacement (dx, dy) of m on (g) in the direct sense will satisfy the relations

$$dy \quad Q$$

Hence the corresponding displacement in the XY plane will be such that

$$\frac{dX}{[illegible]} = \frac{dY}{[illegible]} > 0. \tag{3}$$

The latter displacement will be tangent to (J), in the direct sense with respect to R.

Therefore a necessary and sufficient condition that a direction issuing from M and not tangent to (J) be directed towards the inside of R, is that it shall determine, with the direction defined

[1] See my *Cours d'Analyse*, vol. I.

by (3), an angle with a positive sine. If α and β denote the direction cosines of such a direction, this condition may be written in the form

$$(4) \qquad \beta(pQ - qP) - \alpha(p_1Q - q_1P) > 0.$$

The application to restricted maxima or minima of f on the line (g) is obvious. Let us consider an arc of the latter line, which shall contain m and be sufficiently small. Its image in the XY plane will be a portion of a parallel to the W axis, *which must lie inside* R. If we take its origin at M, its direction cosines, which are $+1$ and 0, must therefore, satisfy the condition (4). We see, then, that the proper sign is plus if we have

$$(5) \qquad p_1Q - q_1P < 0,$$

and minus if

$$(5') \qquad p_1Q - q_1P > 0.$$

In the first case, X_0 negative, the value of f at m, which is the abscissa of M, will be a restricted *minimum* of f under the given conditions; in the second case, a *maximum*.

Similarly, the curve $f(x, y) = f(x_0, y_0)$, which goes through m, will have for its image a portion of the straight line $X = X_0$, and the direction from M thus defined will be parallel to the positive Y axis or to the negative Y axis, according to the sign of the quantity

This quantity and the quantity $p_1Q - q_1P$ have the ratio $-l$, on account of (1). The fact that a restricted maximum of f when g is constant coincides with a maximum or with a minimum of g when f is constant, according to the sign of l, is classic.

It is easy to verify by direct computation that the condition thus obtained is the same as that which would result from the expression (2). The remarkable thing is that the latter can be expressed in terms of the *first* derivatives of f, g, and j.

2. *The Case of a Curve in Space.* — Let us consider the curves defined by the equations

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

and a stationary value, let us say at the (ordinary) point $m(x_0, y_0, z_0)$ of $f(x, y, z)$ on that curve.

At m, the jacobian

$$j = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

must vanish. Again, we shall suppose that m is an ordinary point of the surface $j = 0$, so that not all the three derivatives

$$P = \frac{\partial j}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial j}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial j}{\partial z}$$

are zero. Such a surface (j) will divide the space near m into two regions ω, ω', the first of which will correspond to $j > 0$. Let us consider the point transformation defined by

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = g_1(x, y, z), \qquad Z = g_2(x, y, z).$$

Around M (the image of m), ω and ω' will have a common image R, on one side of the surface (J) which corresponds to j. Let us find a necessary and sufficient condition that the direction from M with the direction cosines α, β, γ be directed towards the inside of R. Let (dx, dy, dz), $(\delta x, \delta y, \delta z)$ be two directions from m, tangent to (j), so that

$$\frac{dy\,\delta z - dz\,\delta y}{P} = \frac{dz\,\delta x - dx\,\delta z}{Q} = \frac{dx\,\delta y - dy\,\delta x}{R}.$$

These two directions, in the above order, will define a direct orientation on s, at m, if the common value of the above ratios is positive. In the XYZ space, the corresponding directions will be

$$\begin{aligned} dX &= p\,dx + q\,dy + r\,dz, \\ dY &= p_1\,dx + q_1\,dy + r_1\,dz, \\ dZ &= p_2\,dx + q_2\,dy + r_2\,dz, \\ \delta X &= p\,\delta x + q\,\delta y + r\,\delta z, \\ \delta Y &= p_1\,\delta x + q_1\,\delta y + r_1\,\delta z, \\ \delta Z &= p_2\,\delta x + q_2\,\delta y + r_2\,\delta z, \end{aligned}$$

so that the tangent line to s at M will have direction cosines A, B, C, such that

$$\frac{A}{dY\,\partial Z - dZ\,\partial Y} = \frac{B}{dZ\,\partial X - dX\,\partial Z} = \frac{C}{dX\,\partial Y - dY\,\partial X}.$$

Now, our direction (α, β, γ) will be directed towards R if it gives with (7) a direct trihedron, that is, if

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ dX & dY & dZ \\ \partial X & \partial Y & \partial Z \end{vmatrix} > 0.$$

Such will be the case for a parallel to the positive X axis if

$$dY\,\partial Z - dZ\,\partial Y > 0,$$

or, on account of (6) and (7),

$$P(q_1 r_2 - r_1 q_2) + Q(r_1 p_2 - p_1 r_2) + R(p_1 q_2 - q_1 p_2) > 0.$$

An analogous solution for extrema on a surface would be interesting to find.

3. *Conclusion.* — Let us come back to the case of the plane. The above argument rests on the properties of the transformation at a point where its jacobian vanishes, which is especially interesting to study from the geometric point of view, as will be done in a paper by Professor Julia to appear shortly in the *Bulletin des Sciences Mathématiques.* The fundamental fact is that, at such a point m, any two curves of the xy plane will, in general, have images which will be tangent to each other; but there is an exception, concerning a certain peculiar direction at m. Any curves tangent to that special direction will have ordinarily in the XY plane, an image that has a cusp, or sometimes a terminal point [1]. The latter case (a particular case of the former) occurs precisely for our curves $f(x, y) = f(x_0, y_0)$, $g(x, y) = 0$.

[1] The words *terminal point* are suggested by the editors as a translation of the French term *point d'arrêt.*

SUR

LES OPÉRATIONS FONCTIONNELLES

(*Comptes rendus*, t. 136, 1903, p. 351-354.)

Les opérations fonctionnelles linéaires, c'est-à-dire les lois suivant lesquelles on peut, à toute fonction $f(x)$ définie dans un intervalle $a < x < b$, faire correspondre un nombre U([1]), de telle façon qu'on ait (quels que soient les nombres c_1, c_2 et les fonctions f_1, f_2)

ont été étudiées principalement par MM. Volterra, Pincherle, Bourlet.

Ces savants ont été conduits à exprimer les opérations en question par des séries de la forme

$$(1) \qquad U = a_0 f(x_0) + a_1 f'(x_0) + \ldots + \frac{a_p}{p!} f^p(x_0) + \ldots.$$

Un tel développement, dans lequel x_0 est un nombre arbitraire, est, par suite, possible d'une infinité de façons. Il ne saurait être valable (sauf dans des cas exceptionnels) que pour des fonctions analytiques :

([1]) Je me place ici au point de vue adopté par M. Volterra dans ses études sur les fonctions de lignes, et qui me paraît préférable à celui de MM. Pincherle et Bourlet. C'est, me semble-t-il, introduire un élément parasite dans la question que de considérer U comme une fonction de la même variable x qui figure dans f. Rien n'empêche, lorsqu'on raisonne comme je le fais dans le texte, de faire dépendre U non seulement de la forme de la fonction $f(x)$, mais aussi d'un certain nombre de paramètres, dont l'un sera, le cas échéant, désigné par x, comme la variable qui figure dans f.

encore a-t-il, en général, un *champ de convergence* limité, même dans ce domaine particulier.

On peut, comme on sait, arriver à un résultat plus précis en remplaçant $f(x)$ par son expression à l'aide de l'intégrale de Cauchy, ce qui donne

$$U[f(x)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\,f(z)\,dz,$$

en désignant par $\varphi(x_0)$ le résultat de l'opération U, appliquée à la fonction $\frac{1}{x_0 - x}$ et désignant par C un contour fermé qui enveloppe le segment de droite ab.

Moyennant quelques propriétés simples supposées à la fonction $\varphi(z)$, on trouve pour U une somme de termes de la forme

$$\int_a^b$$

et d'expressions analogues à (1), *mais dans lesquelles les coefficients $a_0, \ldots, a_p$, ou bien sont en nombre fini, ou bien décroissent comme les coefficients du développement d'une fonction entière.*

Contrairement à la première, une telle réduction, si elle est possible, ne l'est que d'une seule façon. Elle peut s'appliquer lorsque $f(x)$ n'est pas analytique, mais sans que le raisonnement précédent permette de rien affirmer dans ces conditions.

Il m'a paru nécessaire de traiter la question en faisant complètement abstraction de l'analyticité de $f(x)$. C'est à quoi l'on arrive facilement en suivant une voie tracée par Weierstrass et Kirchhoff et introduisant une fonction $F(x)$, laquelle n'aura qu'un nombre fini de maxima et de minima, et telle que

$$F(x)\,dx = 1;$$

par exemple, $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}$.

Si l'on part alors de l'identité connue

$$) \qquad \lim_{\mu=+\infty} \mu \int_a^b f(x)\,F[\mu(x - x_0)]\,dx = f(x_0) \qquad a < x_0 < b,$$

et si l'on suppose (comme l'ont fait les auteurs précédemment cités) que l'opération U est continue (au sens de M. Bourlet), il suffira de poser

$$U\{\mu F[\mu(x-x_0)]\} = \Phi(x_0, \mu)$$

pour montrer que notre opération peut se mettre sous la forme

$$(4) \qquad U[f(x)] = \lim_{\mu=+\infty} \int_a^b f(x)\,\Phi(x, \mu)\,dx.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que U ait la forme (2), $\psi(x)$ étant fini et continu, est que $\Phi(x_0, \mu)$ tende uniformément vers $\psi(x)$, lorsque μ augmente indéfiniment par valeurs positives ou négatives (mais réelles).

Il est un peu moins aisé d'exprimer que U est de la forme (1) ou est une somme d'expressions (1) et d'expressions (2).

La méthode s'étend d'elle-même au cas où U dépendrait d'une fonction $f(x, y, \ldots)$ de plusieurs variables.

On trouverait encore

$$U[f(x, y, \ldots)] = \lim_{\mu=\infty} \int \ldots \int \int_a^b f(x, y, \ldots)\,\Phi(x, y, \ldots, \mu)\,dx\,dy \ldots$$

Aux expressions analogues à (1) ou à (2) viendraient, bien entendu, se joindre (dans le cas de deux variables par exemple) des intégrales *simples*, prises le long de lignes et portant sur f et ses dérivées. L'étude de telles opérations, au point de vue où nous nous plaçons, conduit à des résultats assez curieux, dans le détail desquels je n'entrerai toutefois pas ici.

Je terminerai en indiquant un exemple de fonctions de lignes ou de surfaces, dont la variation infinitésimale a la forme (2), dans le premier cas, la forme analogue exprimée par une intégrale double dans le second, et auxquelles s'appliquent par conséquent des raisonnements tout semblables à ceux du calcul des variations, quoiqu'elles soient bien plus générales que celles dont traite ce calcul, même sous la forme étendue que lui a donnée Mayer.

Considérons une surface fermée S, deux points intérieurs A, B, et soit g_B^A la fonction de Green relative à ces deux points et à cette surface. Quelle sera la variation de g_B^A lorsqu'on déformera infinitésimalement S, sans changer les deux points ?

Si λ est la distance normale de la surface déformée à la surface primitive, on trouve

Il est clair que le résultat serait exprimé par une intégrale simple tout analogue s'il s'agissait du problème de Dirichlet plan.

Il se présenterait sous une forme plus compliquée si g_B^A était la fonction de Neumann, relative au problème hydrodynamique. On aurait alors

$$\iint_S \lambda \qquad \frac{1}{4\pi}\Delta_1(g_A^M, g_B^M)$$

où c est la courbure moyenne $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ et Δ_1 le paramètre différentiel du premier ordre de Beltrami sur S.

MÉMOIRE SUR LE PROBLÈME D'ANALYSE

RELATIF A L'ÉQUILIBRE

DES

PLAQUES ÉLASTIQUES ENCASTRÉES

(EXTRAIT)

(Mémoires présentés par divers savants étrangers à l'Académie des sciences, t. XXXIII, n° 4, 1908.)

Reprenons, d'autre part, la formule (1) ou, ce qui revient au même, la formule

et introduisons-y la fonction

$$\Psi(A, B) = \frac{1}{8\pi}\Delta_A \Delta_B \Gamma_A^B.$$

Nous trouvons simplement (en mettant en évidence le paramètre α dont dépend la déformation du contour)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(A, B, \alpha) = -\int \nu \Psi(A, M, \alpha) \qquad B, M.$$

(1) Γ', Γ sont les fonctions de Green pour $\Delta\Delta u = 0$, relatives à deux contours, le premier contenant le second.

où

$$\nu(s, \alpha) = \frac{\partial n}{\partial \alpha}.$$

Dans cette équation, qu'on peut appeler une *équation intégrale mixte*, nous supposerons que le contour variable C_α va en se rétrécissant constamment (de sorte que, pour $\alpha > \alpha'$, le contour C_α est intérieur à $C_{\alpha'}$) et que le mouvement de ce contour est connu. Elle contient alors la seule fonction inconnue $\Psi(A, B, \alpha)$ laquelle doit être définie (dans les cas qui nous occupent) sous la condition que les points A et B soient intérieurs (au sens large) à C_α.

La portée de ce résultat est singulièrement augmentée si l'on remarque que *nous connaissons d'autres solutions de la même équation* (26).

Soit g_B^A la fonction de Green pour le problème de Dirichlet ordinaire relatif au contour C_α. Désignons par n_A la normale intérieure menée par le point A au contour C_α qui passe par ce point.

Considérons la fonction

$$(27) \qquad \psi_1(A, B, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_A} \, \partial \; g_B^A.$$

Effectuons les différentiations (indépendantes et, par conséquent, permutables) $\frac{\partial}{\partial n_A}$, $\frac{\partial}{\partial n_B}$ dans la formule

Nous voyons que *la fonction ψ_1 est encore une solution de l'équation* (26).

Prenons encore la quantité

$$(28) \qquad \psi_2(A, B, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t_A} \frac{\partial}{\partial t} \gamma_B^A,$$

t_A étant la tangente menée en A au contour C_α qui passe en ce point, et γ, la fonction de Neumann. Nous aurons ainsi *une troisième solution de l'équation* (26), comme le montre la formule

$$ds \qquad A \qquad B \qquad ds.$$

où la quantité C représente la longueur du contour et R le rayon de courbure.

Mais la formule (2) n'est pas particulière à l'équation de Laplace. Toute équation du type elliptique (supposée, pour plus de netteté, identique à son adjointe) et de la forme

$$\Delta u + m \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial y} + lu = 0$$

admet une fonction de Green G, qui donne lieu à la formule (2). Donc la quantité

$$\frac{\partial}{\quad} \frac{\partial}{\quad}$$

vérifiera encore notre équation fonctionnelle.

GÉOMÉTRIE

SUR LA MÉTHODE EN GÉOMÉTRIE

(*Leçons de Géométrie plane*, 1898. Extrait de la Note A.)

Nous voudrions rassembler, sous ce titre, quelques conseils que nous croyons utiles pour l'intelligence des mathématiques en général et, en particulier, pour la résolution des problèmes.

L'élève doit, en effet, se persuader qu'il ne pourra recueillir quelque fruit de ses études mathématiques, ni même les poursuivre sans efforts exagérés et se faire une idée juste de ce qu'est la géométrie, s'il ne parvient non seulement à comprendre les raisonnements qui lui sont exposés, mais encore à en construire d'autres par lui-même, à trouver, dans une mesure plus ou moins étendue, des démonstrations de théorèmes ou des solutions de problèmes.

Contrairement à un préjugé trop enraciné, ce résultat peut être atteint par tout le monde, ou du moins par tous ceux qui s'astreindront à réfléchir et à diriger méthodiquement leurs réflexions. Les préceptes que nous allons indiquer relèvent du bon sens le plus vulgaire. Il n'est pas un d'entre eux qui ne puisse sembler au lecteur une pure banalité. Cependant, l'expérience le montre, l'oubli de l'une ou de l'autre de ces règles évidentes est la cause à peu près unique des difficultés qui se présentent dans la résolution des problèmes élémentaires; et il en est encore ainsi, plus souvent qu'on ne serait tenté de le croire, dans des recherches ayant pour objet des parties plus ou moins élevées de la science mathématique.

THÉORÈMES A DÉMONTRER.

Démontrer un théorème, c'est passer, par la voie du raisonnement, de l'hypothèse à la conclusion.

Dans le théorème (Livre I, n° 36) :

Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est également distant des deux côtés de cet angle.

L'hypothèse et la conclusion sont :

Hypothèse : Si le point M est situé sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ (*fig.* 35).
Conclusion : Alors il sera également distant de AB et de AC.

Nous avons à déduire celle-ci de celle-là, à *transformer* les propriétés énoncées dans l'hypothèse de manière à en dégager celles qui constituent la conclusion.

Il est évidemment nécessaire, avant tout, *de savoir très exactement quelle est l'hypothèse et quelle est la conclusion d'un théorème* que l'on veut démontrer : l'élève devra donc, tout d'abord, s'exercer à les énoncer sans aucune hésitation.

Mais il y a plus, et nous pouvons faire dès à présent une première remarque importante. Dans toute démonstration, on se propose de faire voir que la conclusion a lieu en *supposant vraie l'hypothèse.* Si l'on ne considérait pas celle-ci comme certaine, rien n'assurerait plus l'exactitude de celle-là. Ainsi, dans l'exemple cité au numéro précédent, si le point M n'était pas sur la bissectrice, nous savons (n° 36) qu'il *ne serait pas* équidistant des deux côtés.

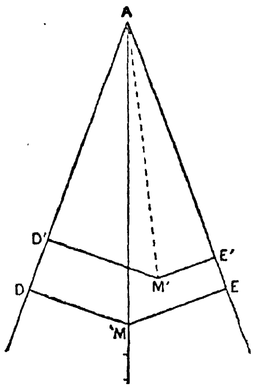
Or il est clair qu'il ne servirait à rien de supposer qu'un fait a lieu, si le raisonnement ne portait pas trace de cette supposition, si ce fait n'était pas utilisé à un moment quelconque. Nous voyons donc qu'*il faut faire intervenir dans le raisonnement l'hypothèse* et même, en général, *toute l'hypothèse.*

Nous reviendrons un peu plus loin sur la règle précédente. Auparavant, nous devons en formuler immédiatement une autre tout à fait

analogue, mais sur laquelle il y a lieu d'appeler tout spécialement l'attention, car elle est, malgré son absolue nécessité, une de celles qui sont le plus fréquemment méconnues. Elle est relative à la *définition* des termes employés.

D'une part, en effet, il est évident qu'on ne saurait raisonner sur des notions qui n'ont pas été définies; et, d'autre part, comme tout à l'heure, il est clair qu'il revient au même d'ignorer une définition ou de ne pas la faire intervenir dans le raisonnement.

Fig. 1.



Nous voyons donc qu'il convient, avant tout, de se *reporter à la définition* de toute notion en présence de laquelle on est mis.

Exemple. — Soit encore le même théorème :

Tout point situé sur la bissectrice d'un angle est également distant des deux côtés de cet angle.

Nous devrons nous poser, dès l'abord, les questions suivantes :

Qu'exprime-t-on en disant que la droite MA (*fig.* 1) *est bissectrice ?*

Réponse. — Qu'elle divise l'angle A en deux parties égales.

Qu'est-ce que la distance du point M *à la droite* AB ?

Réponse. — C'est la longueur de la perpendiculaire abaissée de ce point sur cette droite.

Et notre énoncé deviendra :

Hypothèse $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{MAD} = \widehat{MAE}; \\ \text{MD est perpendiculaire sur AD;} \\ \text{ME est perpendiculaire sur AE.} \end{array} \right.$

Conclusion : MD = ME.

Nous espérons, par cet exemple, avoir fait suffisamment comprendre le sens de cette règle, que Pascal met à la base de toute logique :

Il faut *substituer les définitions à la place des définis* (¹).

La définition d'un même terme peut souvent revêtir plusieurs formes, entre lesquelles on doit choisir la plus commode pour le but que l'on a en vue. Ainsi, on peut encore définir la bissectrice de l'angle AM comme la droite qui fait avec l'un des côtés, dans un sens convenable, un angle égal à la moitié du premier.

Cette manière de formuler la définition ne serait pas avantageuse pour le théorème précédent; c'est elle, au contraire, qui nous a servi à démontrer, par exemple, le théorème du n° 16 (Livre I).

Certains théorèmes permettent de remplacer, de la même façon, une définition par une autre équivalente. C'est ainsi que la définition primitive des parallèles (n° 38) n'est plus employée à partir du n° 39, où l'on apprend à la remplacer par la suivante, qui revient exactement à la première : *Deux parallèles sont deux droites qui forment avec une même sécante deux angles alternes-internes égaux* (*ou deux angles correspondants égaux, ou deux angles intérieurs du même côté supplémentaires*).

La règle énoncée plus haut est peut-être la plus importante de celles dont nous avons à nous occuper ici. La portée en apparaîtra si l'on songe qu'un grand nombre de constructions auxiliaires, quelquefois arbitraires en apparence, en sont une conséquence directe.

Pour n'en citer qu'un exemple, c'est ainsi que, dans le commen-

(¹) Il est même nécessaire, en général, d'utiliser toutes les parties de la définition, lorsqu'il y en a plusieurs; on peut répéter, à ce sujet, ce que nous disons un peu plus loin, relativement à l'hypothèse (n° 275).

cement du II^e Livre, lorsqu'on a à raisonner sur un point quelconque d'une circonférence, on commence toujours par joindre ce point au centre. Le lecteur qui aura réfléchi aux remarques précédentes comprendra que cette construction n'a rien d'artificiel et doit apparaître immédiatement comme nécessaire. Elle dérive en effet de la définition de la circonférence, d'après laquelle, pour exprimer qu'un point M appartient à une circonférence de centre O, on doit exprimer que la distance OM est égale au rayon de cette circonférence.

A partir du Chapitre IV (n^os 73 et suiv.), on voit les choses changer : il n'arrive plus toujours que l'on joigne au centre d'une circonférence les points de cette ligne sur lesquels on doit raisonner. C'est que nous avons appris alors à remplacer la définition primitive de la circonférence par une autre, celle qui a été donnée au n° 82 *bis* et d'après laquelle, pour exprimer qu'un point M appartient à une circonférence, on peut le joindre à trois points A, B, C de cette courbe et exprimer que le quadrilatère ABCM remplit l'une des conditions d'inscriptibilité énumérées au n° 81. Dès lors, dans tout raisonnement où intervient une circonférence, on a le choix entre les deux définitions : c'est l'une ou l'autre qui est employée, suivant les circonstances (1).

Après avoir pris la précaution dont nous venons de parler, il s'agit, comme nous l'avons dit, de transformer les données de l'hypothèse de manière à mettre en évidence la conclusion.

Dans les cas les plus simples, on aperçoit immédiatement un théorème permettant d'opérer cette transformation.

Exemple. — L'hypothèse dont il est question au n° 271 fournit immédiatement la conclusion correspondante par l'intermédiaire d'un cas d'égalité des triangles rectangles.

Dans d'autres cas, au contraire, il faudra passer par un ou plusieurs intermédiaires. On pourra chercher, par exemple, à donner à l'hypothèse une autre forme se rapprochant le plus possible de la conclusion.

(1) D'autres définitions, équivalentes aux premières, se rencontrent dans la suite, par exemple, livre III, n° 131.

Exemple. — Soit à démontrer le théorème (n° 25) :

Dans tout triangle, à un plus grand côté est opposé un plus grand angle.

Ayant à exprimer que AB est plus grand que AC, nous prenons sur AB la longueur AD = AC, de sorte que le point D est entre A et B. L'hypothèse et la conclusion sont donc :

(I) Hypothèse : AD est le prolongement de DB; $\mathrm{AD} = \mathrm{AC}$.

Conclusion : $\widehat{\mathrm{ACB}} > \widehat{\mathrm{ABC}}$.

Le triangle isoscèle ADC, dans lequel les angles à la base sont égaux, permet alors de donner à l'hypothèse la nouvelle forme

(II) Hypothèse { DA est le prolongement de DB; $\widehat{\mathrm{ADC}} = \widehat{\mathrm{ACD}}$.

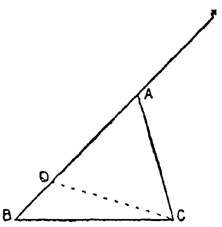
Conclusion : $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ADC}} + \widehat{\mathrm{DCB}} > \widehat{\mathrm{ABC}}$,

ou, plus simplement,

(III) Hypothèse : Dx est le prolongement de DB (*fig.* 2).

Conclusion $\widehat{\mathrm{C}} + \widehat{\mathrm{DCB}} >$ [illegible]

Fig. 2.



ce qui est évident, d'après le théorème sur l'angle extérieur au triangle (même numéro).

Nous sommes, on le voit, arrivés à un résultat par une série de *transformations successives.*

C'est dans chacune de ces transformations qu'il convient particulièrement de ne pas négliger l'application de notre première

règle (n° 270) et d'examiner si aucune partie de l'hypothèse n'est restée inutilisée ou n'a été abandonnée. On s'assurera qu'il en est ainsi en cherchant si la nouvelle hypothèse revient exactement à l'ancienne, lui est entièrement *équivalente*.

Exemple. — Dans l'exemple précédent, la forme (II) de l'hypothèse est absolument équivalente à la forme (I) : c'est-à-dire que si l'hypothèse (I) est vérifiée, il en est de même de l'hypothèse (II) *et réciproquement*. En effet, la seule différence consiste en ce que l'égalité AC = AD a été remplacée par $\widehat{ADC} = \widehat{ACD}$. Or, nous savons que l'une *quelconque* de ces deux conditions entraîne l'autre. L'hypothèse (II) peut donc être absolument substituée à la première : se donner l'une ou se donner l'autre, revient au même.

Quoiqu'il puisse arriver qu'un élément de l'hypothèse soit abandonné sans inconvénient (¹), ce n'est pas ce qui a lieu en général (²); et lorsqu'on se trouvera arrêté dans le cours d'une démonstration, on devra se demander si cette impossibilité d'arriver au but n'est pas due à ce qu'on a perdu, chemin faisant, une partie de l'hypothèse donnée.

Exemple. — Soit à démontrer le théorème suivant :

M *étant un point dans le plan d'un triangle* ABC, *on fait l'angle* $\widehat{BAP} = \widehat{MAC}$

(¹) C'est ce qui arrive pour l'hypothèse (III) du même exemple, par rapport à l'hypothèse (II). Celle-ci est, en effet. exactement équivalente à

> Dx est le prolongement de DB;
> *il existe sur* Dx *un point tel, que le triangle qui a ce point pour sommet et* DC *pour base ait ses angles à la base égaux.*

Car ce dernier point pourra évidemment être appelé le point A. Mais ce point peut ne pas exister, même si l'hypothèse (III) :

(III) Dx est le prolongement de DB

est vérifiée. Il faut, pour qu'il existe, que l'angle $\widehat{xDC}$ soit aigu, d'après le théorème sur l'angle extérieur.

Donc l'hypothèse (III) peut avoir lieu sans que l'hypothèse (II) soit vraie.

(²) On s'attache précisément à donner aux énoncés des formes telles, que l'hypothèse ne contienne aucun élément inutile. Dans les recherches plus élevées, et surtout dans les applications des mathématiques, la plus grande difficulté consiste souvent à reconnaître quelles sont, parmi les données de la question, celles que l'on doit utiliser.

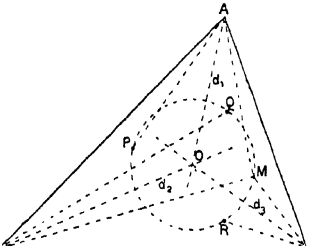
(*fig.* 3) *et l'on prend la longueur* AP = AM; *on fait de même* $\widehat{CBQ} = \widehat{MBA}$, BQ = BM *et* $\widehat{ACR} = \widehat{MCB}$, CR = CM. *Les points* M, P, Q, R *sont sur un même cercle*;

autrement dit

$$\text{(I) Hypothèse} \begin{cases} \widehat{BAP} = \widehat{MAC};\ AP = AM; \\ \widehat{CBQ} = \widehat{MBA};\ BQ = BM; \\ \widehat{ACR} = \widehat{MCB};\ CR = CM. \end{cases}$$

Conclusion : M, P, Q, R sont sur un même cercle.

Fig. 3.



Soit d_1 la bissectrice de l'angle A : les deux côtés AB, AC sont symétriques par rapport à cette droite, et à cause de l'égalité des angles $\widehat{BAP}$, $\widehat{MAC}$, il en est de même de AM, AP. Donc le point P est le symétrique de M par rapport à d_1; de même, Q est le symétrique de M par rapport à la bissectrice d_2 de l'angle B; et R, le symétrique de M par rapport à la bissectrice d_3 de l'angle C. Nous sommes donc tentés de transformer ainsi l'hypothèse :

(II) Hypothèse
- P est le symétrique de M par rapport à la droite d_1;
- Q » » d_2;
- R » » d_3.

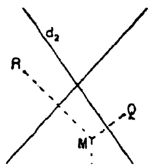
Conclusion : M, P, Q, R sont sur un même cercle.

Or, si l'on partait de cette forme de l'énoncé, il serait impossible d'arriver à une démonstration; en effet, la proposition, ainsi formulée, est fausse. Il n'est pas vrai qu'un point quelconque M et ses symétriques P, Q, R par rapport à trois droites *quelconques* soient sur un même cercle. C'est ce dont on se rend compte à la simple inspection de la figure 4; ou encore, en remarquant que trois points quelconques P, Q, R peuvent être regardés comme les symétriques d'un point quelconque M

par rapport à trois droites d_1, d_2, d_3, à savoir les perpendiculaires aux milieux de MP, MQ, MR.

Nous avons donc commis une faute en substituant la forme (II) de l'énoncé, à la forme (I). Cette faute tient à ce que les trois droites d_1, d_2, d_3 ne sont pas quel-

Fig. 4.



conques : ce sont les bissectrices des angles du triangle donné et, comme telles, elles concourent en un même point. La forme correcte de l'hypothèse transformée est donc (¹)

(II′) Hypothèse
- P est symétrique de M par rapport à la droite d_1;
- R » » d_3;
- les droites d_1, d_2, d_3 concourent en un même point O

et conduit immédiatement au résultat, car on voit immédiatement que les quatre points M, P, Q, R sont sur une même circonférence de centre O.

Au lieu de transformer l'hypothèse pour la rapprocher de la conclusion, il y aura souvent avantage à opérer d'abord sur celle-ci, et à s'efforcer de remplacer la conclusion primitive par une autre qui entraîne la première et qui se déduise plus aisément de l'hypothèse.

Exemple. — Soit à démontrer le théorème (Ex. 72).

Si d'un point M, *situé sur la circonférence circonscrite à un triangle* ABC, *on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ, MR *sur les trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.*

Nous démontrerons que les points P, Q, R (*fig.* 5) sont en ligne droite si nous

(¹) Cette nouvelle hypothèse peut être substituée à l'ancienne : trois droites concourantes peuvent, en général, être regardées comme les bissectrices des angles d'un triangle (Ex. 38).

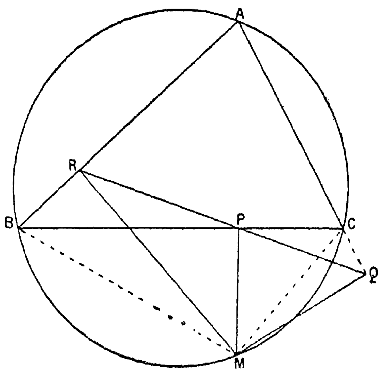
démontrons que, en joignant PQ, PR, les angles $\widehat{\mathrm{BPR}}$, $\widehat{\mathrm{CPQ}}$, qui ont la position d'opposés par le sommet, sont égaux. Donc, l'hypothèse étant

Hypothèse $\begin{cases} \text{Les points A, B, C, M sont un même cercle;} \\ \text{MP, MQ, MR sont respectivement perpendiculaires sur BC, CA, AB,} \end{cases}$

nous pouvons donner à la conclusion la forme

Conclusion : $\widehat{\mathrm{BPR}} = \widehat{\mathrm{CPQ}}$.

Fig. 5.



Mais (81), en raison des angles droits $\widehat{\mathrm{BRM}}$, $\widehat{\mathrm{BPM}}$, le quadrilatère BRPM est inscriptible et donne $\widehat{\mathrm{BPR}} = \widehat{\mathrm{BMR}}$; de même le quadrilatère CQMP est inscriptible et donne $\widehat{\mathrm{CPQ}} = \widehat{\mathrm{CMQ}}$. Il nous suffira donc d'établir (moyennant la même hypothèse) la conclusion

Conclusion $\widehat{\mathrm{BMR}} = \widehat{\mathrm{CMQ}}$.

La conclusion primitive a donc été remplacée par une autre, dont la démonstration est plus simple et sera trouvée aisément par le lecteur [1].

Il est clair que, dans cette nouvelle manière de procéder, on devra prendre une précaution analogue à celle que nous avons recommandée

---

[1] Nous avons raisonné en admettant que la disposition de la figure était celle qui est représentée (*fig.* 5). Il conviendra de modifier la démonstration de manière à la rendre indépendante de cette disposition : ce qui est aisé à l'aide des remarques du n° 82. Toutefois, dans le problème actuel, on peut toujours se placer dans le cas auquel se rapporte notre raisonnement; il suffira de changer, au besoin, l'ordre des lettres A, B, C.

dans la première, et s'assurer que l'on ne cherche pas à démontrer plus que la conclusion donnée, à moins que l'on n'ait des raisons de croire que cette conclusion plus étendue que la première est encore exacte.

Il convient, à présent, de revenir sur une remarque importante que nous avons dû laisser de côté en commençant et que, cependant, l'on doit appliquer dès la lecture de l'énoncé donné.

Il est à observer, en effet, que beaucoup de théorèmes sont susceptibles d'être énoncés sous plusieurs formes différentes. Nous en avons signalé des exemples dans le texte.

EXEMPLE I. — Nous avons remarqué au nº 32 que la proposition :

Tout point équidistant de deux points A, B *est sur la perpendiculaire au milieu de* AB

peut encore s'énoncer :

Tout point qui n'est pas sur la perpendiculaire au milieu de AB *est inégalement distant de* A *et de* B.

Nous avons vu qu'il y a là une remarque générale : la proposition contraire d'une proposition quelconque équivaut à la réciproque de la même proposition.

C'est dans le même ordre d'idées que rentre le mode de démonstration dit *par l'absurde* et qui consiste à montrer qu'en supposant en même temps l'hypothèse vraie et la conclusion fausse, on est conduit à une contradiction.

EXEMPLE II. — L'énoncé (nº 23) :

La bissectrice de l'angle au sommet d'un triangle isoscèle est perpendiculaire à la base et la divise en deux parties égales

revient, nous l'avons vu [1], à l'un quelconque des suivants :

La hauteur abaissée du sommet tombe au milieu de la base et divise l'angle au sommet en deux parties égales;

La perpendiculaire élevée au milieu de la base passe par le sommet et est bissectrice de l'angle au sommet; etc.

---

[1] Rappelons (*cf.* nº 41) que l'équivalence de ces différents énoncés tient à ce qu'il n'y a qu'*une* bissectrice de l'angle au sommet, qu'*une* hauteur, qu'*une* perpendiculaire au milieu de la base, etc.

Il est clair que cet exemple, comme le précédent, représente un fait général; nous avons retrouvé le même fait, par exemple, au n° 62, Livre II. D'ailleurs, on le rencontre dès les premiers commencements de la géométrie. La démonstration du n° 41 (réciproque du théorème du n° 38) n'est évidemment qu'une remarque de cette espèce.

Ces deux catégories générales de cas où un énoncé peut être remplacé par un autre équivalent ne sont d'ailleurs pas seules; la réflexion devra, dans chaque circonstance particulière, faire trouver les différentes formes que peut prendre une même proposition. Il est évidemment essentiel de les passer en revue, afin de choisir celle qui se prête le mieux à la démonstration, en un mot de *se poser la question de manière à en rendre la solution le plus aisée possible* (1).

Cette dernière observation termine l'exposé des règles fondamentales que nous nous proposions d'indiquer. Il sera utile d'étudier, au point de vue de l'application de ces principes, les démonstrations données dans le texte et de se poser, par exemple, des questions telles que les suivantes :

Pour démontrer le théorème sur les médianes d'un triangle (56), nous avons pris les milieux de BG et de CG (*fig.* 53). Devait-on logiquement songer à cette construction ? — Pourrait-on la remplacer par d'autres (2) ?

— Peut-on remplacer l'énoncé du n° 55 (droite qui joint les milieux des côtés d'un triangle) par un autre équivalent ? — Pourrait-on démontrer directement ce dernier énoncé ?

— Dans l'Exercice 8, les deux parties de la conclusion à démontrer supposent-elles toutes deux le point donné intérieur au triangle ? — La réponse à cette question indique-t-elle quel théorème doit-être invoqué pour la démonstration de chacune des deux parties ?

— Dans les démonstrations du n° 27, à quel moment est-il fait usage de ce fait que le polygone enveloppé est convexe ?

Etc., etc.

---

(1) « On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre. » (Abel.)

(2) Une de celles-ci est donnée dans l'Exercice 37.

SUR

QUELQUES APPLICATIONS

L'INDICE DE KRONECKER

(Extrait de la Note parue dans l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, de M. J. Tannery.)

APPLICATIONS.

Théorème de Schoenflies. — La démonstration donnée précédemment du théorème de M. Jordan nous apprend, non seulement qu'une courbe fermée sans point double divise le plan en une région extérieure et une région intérieure, mais aussi que l'ordre d'un point par rapport à la courbe est égal à o dans la première de ces régions, et à ± 1 dans la seconde.

Ceci suffit, comme on va le voir, pour démontrer un important théorème de M. Schoenflies, qui s'énonce ainsi :

Soient

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y) \tag{24}$$

deux fonctions de x et de y, bien définies et continues à l'intérieur et sur la circonférence du cercle

$$x^2 + y^2 \leqq 1. \tag{25}$$

Supposons que les égalités

ne puissent être vérifiées simultanément dans le cercle en question sans que l'on ait $x = x'$, $y = y'$.

Soit C la courbe décrite par le point (X, Y) lorsque (x, y) décrit la circonférence du cercle.

Alors *les équations* (24) *où* X, Y *seront considérés comme donnés, auront une solution* (évidemment unique d'après l'hypothèse) *toutes les fois que le point* (X, Y) *sera pris à l'intérieur de* C.

Ce théorème résulte immédiatement des propriétés de l'ordre et de l'indice établies dans ce qui précède.

En effet, un point (X, Y) intérieur à C est caractérisé par ce fait que son ordre par rapport à C est égal à ± 1.

Ceci revient à dire que l'indice du système $|f(x, y) - X, g(x, y) - Y|$ a cette même valeur et est par conséquent différent de o.

Donc les équations (24) ont à l'intérieur du cercle (25), une solution commune. C. Q. F. D.

Je vais maintenant me servir, comme je l'avais annoncé, du théorème de Jordan dans l'espace à plus de deux dimensions. Je vais même supposer ce théorème démontré avec un complément qu'il est naturel de lui donner d'après les considérations qui précèdent. J'admettrai non seulement qu'une surface fermée sans point double divise toujours l'espace à n dimensions en une région extérieure et une région intérieure, mais encore que l'ordre de tout point intérieur est égal à ± 1.

Dans ces conditions, *le théorème de Schoenflies est démontré pour un nombre quelconque de variables.*

Autrement dit, soit

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = X_n$$

un système de relations définissant les quantités X comme fonctions

continues des x dans un certain volume v de l'espace à n dimensions : volume que je supposerai, pour simplifier (quoique cette hypothèse ne soit pas essentielle), limité par une surface d'un seul tenant.

Supposons que, dans le volume en question, on ne puisse pas avoir simultanément

$$(26) \qquad x_1, \ldots, x_n) = f_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

si l'on n'a pas $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $\ldots$, $x_n = x'_n$.

Soit alors S la surface (nécessairement fermée et sans point double) que décrit le point X lorsque le point x décrit la frontière s de v. *Les équations* (24′) *auront une solution toutes les fois que le point* X *sera à l'intérieur de* S.

La démonstration donnée pour le cas de deux variables subsiste en effet sans modification une fois admises les propositions ci-dessus indiquées.

On peut même remarquer qu'elle suppose seulement, pour démontrer l'existence d'une solution au moins, l'impossibilité des relations (26) entre deux points distincts de la *frontière s*.

On voit par ce que nous venons de dire que le théorème de M. Schoenflies n'est pas distinct au fond de celui de M. Jordan.

La portée de ce théorème est d'ailleurs très grande : elle apparaîtra si on le compare aux résultats classiques de la théorie des équations du premier degré.

Considérons un système d'équations linéaires dans lequel le nombre des inconnues est égal à celui des équations.

Quoiqu'un tel système admette en général une solution et une seule, il peut arriver qu'il soit impossible ou bien indéterminé.

Mais la condition pour que le système admette une solution, quelles que soient les valeurs attribuées aux seconds membres, n'est pas distincte de celle qui exprime qu'il ne peut en avoir plus d'une.

Le théorème de M. Schoenflies nous apprend que cette dernière condition entraîne encore la première, du moins dans une portion convenablement choisie de l'espace, lorsqu'au lieu d'équations linéaires on envisage des équations tout à fait générales de la forme (24′).

La remarque suivante découle immédiatement du théorème de Schoenflies.

Supposons qu'entre deux volumes V, V′ de l'espace à n dimensions (limités chacun par une surface d'un seul tenant) existe une correspondance parfaite et continue. Je dis que s'il en est ainsi, *aux points intérieurs à* V *correspondront des points intérieurs à* V′ *et aux points frontières de* V, *des points frontières de* V′.

Supposons en effet que le point P, intérieur à V, corresponde à un point P′, situé sur la frontière S′ de V′. De son côté, s'il en est ainsi, la frontière S de V correspondra à une surface S′ (fermée et sans point double) à laquelle P n'appartiendra pas. D'après le théorème de M. Jordan, S′ délimite un volume V′, tout entier intérieur à V, et auquel par conséquent P′ est extérieur [1], de sorte que les points P, intérieurs à S, ne correspondraient à aucun point P′ intérieur à S′.

Il y a donc contradiction avec le théorème de Schoenflies, et notre conclusion est démontrée.

Les considérations précédentes permettent également de démontrer, pour le volume de la sphère, à un nombre quelconque de dimensions, le *théorème de Brouwer*.

Le volume de la sphère à n dimensions ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, est l'ensemble V des points qui vérifient l'inégalité

$$\dots + x_n^2 \leqq 1. \qquad (27)$$

Le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

Toute transformation parfaite et continue du volume V *en lui-même laisse au moins un point invariant, soit à l'intérieur, soit sur la frontière.*

Soient en effet, $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les coordonnées de deux points correspondants. Considérons les n fonctions

[1] Le fait qu'un point P′ de S′ est nécessairement extérieur à toute surface S intérieure à V′ résulte de ce qu'on peut joindre P′ à l'infini par un chemin continu n'ayant avec V′ ou S′ d'autre point commun que P′ (ce qui, à son tour, doit être considéré comme faisant partie du théorème de Jordan).

en supposant d'abord que le point $(x_1, \ldots, x_n)$ décrit la frontière de la sphère.

Si ces n fonctions s'annulent simultanément, le théorème est démontré. Sinon, le système de fonctions que nous venons d'écrire a même indice que le système $(x_1, \ldots, x_n)$, car on a constamment [1]

$$\cdot\, 0.$$

Comme ce dernier indice (c'est-à-dire l'ordre du centre par rapport à la surface de notre sphère) est différent de 0, il existe forcément un point intérieur où les fonctions (28) sont simultanément nulles.

C. Q. F. D.

[1] Cette inégalité est, en vertu de l'identité bien connue de Lagrange, une conséquence des équations

$$x_1^2 + x_2^2 + . \qquad c_n^2 = x_1'^2 + \ldots + x_n'^2 = 1.$$

SUR

LES ÉLÉMENTS LINÉAIRES

A PLUSIEURS DIMENSIONS

(*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 25, 190

La notion de ligne droite trouve son extension naturelle à un élément linéaire quelconque dans la notion de géodésique.

Il n'en est pas de même de la notion de plan. Il n'arrive pas, en général, que les géodésiques d'un élément linéaire puissent former des familles à plusieurs paramètres distribuées chacune sur une surface unique.

On peut se proposer de rechercher les variétés qui admettent de telles *surfaces géodésiques*, c'est-à-dire des surfaces jouissant de cette propriété que la géodésique qui joint deux points quelconques de l'une d'elles y est contenue tout entière.

Dans le cas de trois dimensions, cette recherche n'offre d'ailleurs aucune difficulté. Si, en premier lieu, nous cherchons les surfaces géodésiques dépendant d'un paramètre (et dont il passera, par conséquent, une par chaque point de la variété), nous pourrons prendre, pour coordonnée z, celle qui reste constante sur les surfaces en question, et choisir les deux autres coordonnées x et y de manière que les lignes $x=$ const., $y=$ const. soient orthogonales à ces surfaces. L'élément linéaire sera alors

$$ds^2 = \mathrm{A}\,dz^2 + \mathrm{E}\,dx^2 + 2\mathrm{F}\,dx\,dy + \mathrm{G}\,dy^2. \tag{1}$$

La propriété demandée s'exprimera évidemment par ce fait que, sur toute géodésique, $\frac{d^2z}{ds^2}$ sera nul en même temps que $\frac{dz}{ds}$ $\Big($et cela, quels que soient $x' = \frac{dx}{ds}$ et $y' = \frac{dy}{ds}\Big)$.

Or, l'inspection de l'équation qui fait connaître $z'' = \frac{d^2 z}{ds^2}$ montre immédiatement que ceci a lieu dans l'hypothèse où E, F, G sont indépendantes de z et dans cette hypothèse seulement.

Nous avons donc ainsi toutes les variétés admettant une série simple de surfaces géodésiques.

Pour voir quand ces surfaces géodésiques forment des catégories plus étendues, nous pourrons réduire l'élément linéaire à la forme

(1′) $$\Lambda\, dz^2 + 2\lambda\, dx\, dy,$$

λ étant fonction de x et de y. Si nous désignons par $z = f(x, y)$ l'équation d'une surface géodésique, par p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de f, et que nous écrivions que l'équation

$$z'' = p x'' + q y'' + r x'^2 + 2 s x' y' + t y'^2$$

devient une identité lorsqu'on y remplace x'', y'', z'' par leurs valeurs tirées des équations des géodésiques et z' par $px' + qy'$, il vient

(2) $$\left\{\begin{aligned} 2r &= 2p\frac{\partial \log \Lambda}{\partial x} + p^2 \frac{\partial \log \Lambda}{\partial z} + \frac{p^2}{\lambda}\left(p\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right) - 2p\frac{\partial \log \lambda}{\partial x},\\ -2s &= p\frac{\partial \log \Lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \log \Lambda}{\partial x} + pq\frac{\partial \log \Lambda}{\partial z} + \frac{pq}{\lambda}\left(p\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right),\\ -2t &= 2q\frac{\partial \log \Lambda}{\partial y} + q^2 \frac{\partial \log \Lambda}{\partial z} + \frac{q^2}{\lambda}\left(p\frac{\partial \Lambda}{\partial y} + q\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right) - 2q\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

système dont l'intégration s'effectue aisément par les méthodes classiques. Les équations obtenues en égalant à zéro $\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial x}$ et $\frac{\partial s}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x}$ se réduisent à

$$\begin{aligned} &\Lambda p(p^2 N - q^2 M) - qM - pP = 0,\\ &\Lambda q(q^2 M - p^2 N) - pN - qP = 0, \end{aligned}$$

en posant

(4) $$\left\{\begin{aligned} M &= \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \log \lambda}{\partial x}\frac{\partial \Lambda}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2},\\ N &= \frac{1}{2\Lambda}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}\frac{\partial \Lambda}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2};\\ P &= \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial x}\frac{\partial \Lambda}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right.$$

Lorsque $M = N = P = 0$, les équations (3) ne déterminent nullement la direction du plan tangent à la surface cherchée. Il peut alors passer (et il passe en effet) une surface géodésique par deux géodésiques concourantes quelconques. C'est le cas de l'espace ordinaire, euclidien ou non, et de lui seul, ainsi qu'il est aisé de le constater par l'intégration des équations $M = N = P = 0$.

S'il n'en est pas ainsi, les fonctions cherchées se trouveront parmi les solutions communes aux équations (3). Si, par un point quelconque, il doit passer une infinité de surfaces géodésiques (c'est le seul cas que nous étudierons), les premiers membres de ces équations doivent admettre un facteur commun. Ceci exige (comme on s'en assure aisément) que M, P et N soient en progression géométrique, autrement dit

$$M = \rho P = \rho^2 N \tag{5}$$

moyennant quoi les équations (3) donnent uniquement

$$p + \rho q = 0. \tag{6}$$

Si maintenant, dans les équations

$$r + \rho s + q\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} + p\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0,$$
$$s + \rho t + q\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} + q\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = 0$$

qui résultent de la différentiation de la précédente, on remplace r, s et t par leurs valeurs (3) et qu'on veuille que les équations obtenues soient des conséquences de l'équation (6), on aura tout d'abord

$$\frac{\partial \rho}{}$$

puis

$$\partial \log \quad + \quad \partial \log N \quad \partial \log N$$

$$2\frac{}{\partial y} + 2\rho \qquad \partial x$$

Or, si l'on différentie ces dernières équations pour reporter le résultat de la différentiation dans les équations (5), celles-ci se

réduisent toutes deux à

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial y}=\rho\frac{\partial^2\rho}{\partial x\,\partial y}$$

ρ étant, par conséquent, le produit d'une fonction de x par une fonction de y, on peut, moyennant un changement de variable, supposer $\rho = -1$. Après quoi l'on trouve

Autrement dit (en revenant à des coordonnées réelles), l'élément linéaire cherché a nécessairement la forme

ou, plus simplement,

$$s^2 = \lambda(dx^2 + ds_1^2) \tag{8}$$

ds_1^2 désignant un élément linéaire à deux variables y, z.

Effectivement, sur les géodésiques de l'élément linéaire (8), y et z varient comme sur les géodésiques de ds^2, de sorte que l'on a des surfaces géodésiques dépendant de deux paramètres, une géodésique quelconque étant contenue dans une (et, en général, dans une seule) de ces surfaces.

Le problème n'a donc, comme on voit, que des solutions assez banales. Il serait toutefois intéressant de faire une recherche analogue lorsque le nombre m des dimensions est supérieur à 3. Là, en effet, le problème se complique, puisque les surfaces géodésiques sont alors remplacées par des multiplicités à p dimensions (p étant un nombre auquel on devra donner successivement toutes les valeurs de 2 à $m-1$) et que ces multiplicités peuvent à leur tour dépendre d'un nombre variable de paramètres. La solution résulterait, sans doute, aisément des méthodes de calcul différentiel absolu de MM. Ricci et Levi-Civita, si tant est que ces auteurs ne l'aient pas déjà obtenue.

SUR LES POINTS DOUBLES

DES

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

ET SUR

LA CONSTRUCTION PAR RÉGIONS

(*Nouvelles Annales de mathématiques*, 5ᵉ série, t. I, 1923.)

1. Soient

$$x, y, u) = 0,$$

(1′) $$x, y, u) = 0,$$

les équations des deux courbes planes C, C_1 dépendant d'un même paramètre variable u. Le lieu L décrit par les points communs à ces deux courbes, lorsque u varie, s'obtient en éliminant u entre les deux équations précédentes.

Nous supposerons d'ailleurs ces équations algébriques et entières.

Peut-on trouver, en opérant directement sur les équations (1), (1′), les points doubles de la ligne L ?

C'est ce que donne aisément une méthode connue, si je ne me trompe, depuis Hermite et qui repose sur la méthode d'élimination par les fonctions symétriques. Soient, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ les racines de l'équation (1), supposée de degré p en u : le résultat de l'élimination de u entre nos deux équations, c'est-à-dire l'équation du lieu cherché, est

$$x, y) = 0$$

avec

(2) $$y) \equiv f_1($$

Un point (x_0, y_0) de L — pour lequel, par conséquent, les équations (1), (1′) admettront une racine commune u_1 — sera double s'il satisfait, en outre, aux deux relations

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Or $\frac{\partial L}{\partial x}$, par exemple, peut se calculer d'après l'expression (2) de L, si du moins le théorème des fonctions implicites s'applique à la différentiation de la fonction $u_1(x, y)$, ce que nous supposerons tout d'abord. On aurait, en thèse générale, p termes, puisque u est un produit de p facteurs; mais ici un seul terme est différent de zéro, celui qu'on obtient en faisant porter la différentiation sur le premier facteur. Donc, on doit avoir

$$\frac{\partial f_1}{u_1} \qquad x, y, u_p) = 0$$

et, de même,

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

On voit que ceci peut se produire de deux manières :

1° Ou bien

(3) $$f_1(x, y, u_2) f_1(x, y, u_3) \ldots f_1(x, y, u_p) = 0,$$

c'est-à-dire que *les équations* (1), (1′) *ont au moins* DEUX *racines communes*;

2° Ou bien on a, à la fois,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{} \frac{\partial u_1}{}$$

Si l'on tient compte des valeurs de $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, telles qu'on les tire de l'équation (1), on voit que *la condition pour qu'il en soit ainsi est*

donnée par la double proportion [1] (dans laquelle nous avons supprimé à la lettre u l'indice 1 devenu inutile)

$$\partial u)'$$

laquelle doit être vérifiée en même temps que (1) et (1').

Le cas où le théorème des fonctions implicites serait inapplicable à l'équation (1) ne change rien aux conclusions précédentes. C'est, comme on le sait, celui où $\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0$, c'est-à-dire où ($x$ étant remplacé par x_0 et y par y_0) u_1 est racine double de (1). Si, pour l'équation (1'), u_1 est racine simple, on pourra recommencer les raisonnements précédents en intervertissant les rôles des polynomes f, f_1. Dans le cas contraire, les équations données ont deux racines communes égales entre elles, ce qui est un cas particulier de notre hypothèse 1° [équation (3) avec $u_2 = u_1$].

2. Ce qui précède apparaît d'ailleurs immédiatement au point de vue géométrique, en considérant u comme une troisième coordonnée cartésienne. (1) et (1') représentent alors deux surfaces et L est la projection de leur intersection sur le plan des xy. Cette projection peut effectivement, comme on le sait, avoir deux sortes de points doubles : points doubles « apparents » (ou « par projection ») et points doubles véritables dans l'espace. La première catégorie correspond à la relation (3), la seconde aux relations (4) [puisqu'alors les deux surfaces (1), (1') sont tangentes entre elles].

3. Je prendrai comme exemple d'un calcul de cette espèce le problème suivant, proposé autrefois en Mathématiques spéciales :

Lieu des points communs à deux coniques C, C_1 *qui varient en restant constamment semblables entre elles, chacune d'elles ayant, d'autre part, ses foyers fixes.*

[1] En coordonnées homogènes, on aurait un quatrième rapport $\frac{\partial f_1}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial z}$ égal à la valeur commune des trois premiers; les équations (4) ainsi modifiées permettront, comme il est connu, de traiter le cas des points à l'infini.

Si la conique C était rapportée à ses axes, les demi-longueurs de ceux-ci étant $c\sqrt{u}$ et $c\sqrt{u-1}$, son équation serait

$$\frac{X^2}{u} + \frac{Y^2}{u-1} - c^2 = 0. \tag{5}$$

Cette même équation représentera la conique rapportée à deux axes rectangulaires donnés d'une manière quelconque, si l'on pose

$$X = x\cos\theta - y\sin\theta - p, \qquad Y = x\sin\theta + y\cos\theta - q, \tag{6}$$

où θ, p, q sont trois constantes données. De même l'équation de la seconde conique pourra s'écrire

$$\frac{X_1^2}{u} + \frac{Y_1^2}{u-1} - c_1^2 = 0 \tag{5'}$$

[u étant le même que dans l'équation (5), de manière à exprimer la similitude des deux courbes], avec

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= x\cos\theta_1 - y\sin\theta_1 - p_1, \\ Y_1 &= x\sin\theta_1 + y\cos\theta_1 - q_1. \end{aligned}\right. \tag{6'}$$

L'élimination de u entre (5) et (5') pourrait s'effectuer en rendant entier. Mais on peut aussi résoudre par rapport à $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u-1}$, et exprimer que la différence des inverses des quantités ainsi obtenues est 1. Il vient ainsi

$$X^2Y_1^2 - \text{[illegible]} + Y_1^2 \text{[illegible]}$$

Le lieu est donc une courbe L du sixième degré. On voit immédiatement qu'elle se prête au mode de construction « par régions », lequel conduit, ici, à tracer les courbes

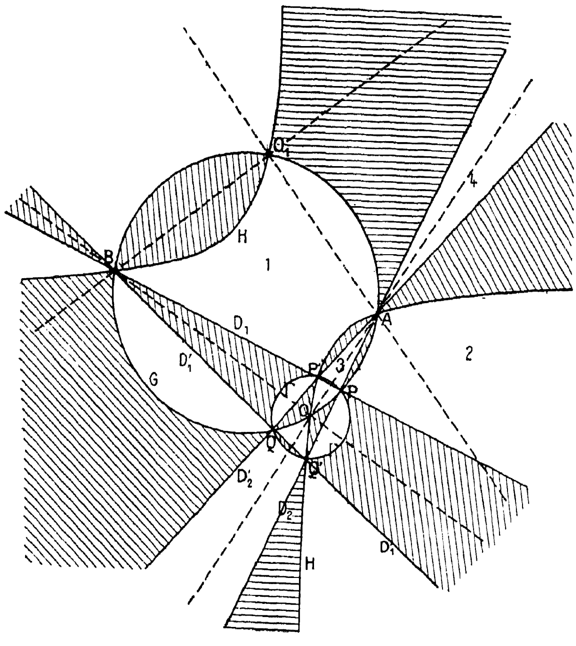
$$\left\{\begin{aligned} G &= XY_1 - X_1Y = 0, \\ H &= XY_1 + YX_1 = 0, \\ \Gamma &= c^2(X_1^2 + Y_1^2) - c_1^2(X^2 + Y^2) = 0. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les deux premières sont un cercle G et une hyperbole équilatère H, toutes deux passant par les centres O, O_1 des deux coniques

génératrices, par le point de rencontre A des axes focaux et le point de rencontre B des axes non focaux. Le cercle a son centre au milieu de AB; l'hyperbole a son centre au milieu de OO_1 et ses asymptotes parallèles aux bissectrices des angles OAO_1, OBO_1. $\Gamma = 0$ est un cercle par rapport auquel O, O_1 sont inverses l'un de l'autre. Enfin D_1, D_2, D'_1, D'_2 sont quatre droites dont la disposition, ainsi que celle des trois coniques précédentes, est représentée figure 1.

La courbe L, qui a pour asymptotes (réelles) celles de l'hyper-

Fig. 1.



bole H, a, d'après la forme même de l'équation (7), les points doubles A (commun à G, H, D_2, D'_2), B (commun à G, H, D_1, D'_1) et les quatre autres P (commun à G, Γ, D_1, D_2), Q (commun à G, Γ, D'_1, D'_2), P′ (commun à H, Γ, D_1, D'_2), Q′ (commun à H, Γ, D'_1, D_2).

Soit, en tout, *huit* points doubles, car il faut encore compter comme tels les points circulaires à l'infini.

4. Les points doubles ainsi trouvés sont-ils les seuls ?

C'est ce que la méthode précédente va nous permettre de décider. Nous allons voir qu'il en est bien ainsi dans le cas général, c'est-à-dire pour un choix arbitraire des données. Au contraire, des points doubles supplémentaires apparaîtront dans des cas spéciaux, caractérisés par une relation entre les données. Mais il est entendu que je laisserai de côté tous les cas encore plus particuliers, c'est-à-dire ceux dont la réalisation exigerait deux relations ou plus entre les données.

Les branches infinies de la courbe étant connues par les remarques qui précèdent, nous nous bornons aux points à distance finie. Nous avons à chercher :

1° Les points doubles qui, au point de vue du raisonnement précédent, apparaissent par projection. Il faut, pour cela, que les deux polynomes (1), (1′), c'est-à-dire les deux polynomes en u obtenus en multipliant par $u(u-1)$ les quantités (5), (5′), soient identiques à un facteur constant k près, puisqu'ils sont du second degré. Les quantités (5), (5′) elles-mêmes doivent donc ne différer l'une de l'autre que par ce même facteur k, ce qui exige

Or, ceci donne précisément (à distance finie) les points doubles déjà obtenus.

2° Les points doubles qui se présentent comme « véritables ».

Nous les trouverons en écrivant les relations (4). En tenant compte des expressions (6), (6′), l'égalité des deux premiers rapports donne

$$\frac{X_1 \cos\theta \quad \ldots}{X \cos\theta \quad \ldots} \qquad \frac{X_1 \sin\theta_1 \quad Y_1 \cos\theta_1 \quad \ldots}{X \sin \ldots} = k$$

et le dernier rapport

$$k = \frac{\ldots}{u^2 \quad (u-1)^2}$$

Or les relations (10) donnent

$$(11') \qquad \cdots \frac{\cdot}{\cdot\, 1)^2}\Big] k^2.$$

D'où [1]

$k = 0$ (ou $k = \infty$) ne donnerait rien [les équations (10) exigeraient $X_1 = Y_1 = 0$, ce qui est incompatible [2] avec (5')]. On doit donc prendre

$$k = 1,$$

moyennant quoi la relation (11') est vérifiée d'elle-même.

Pour $k = 1$, les relations (4) expriment que l'équation

$$X_1^2 - X^2 + \cdots = c_1^2 - c^2$$

représente une surface ayant un point conique au point double cherché et que, en particulier, la conique obtenue en laissant u constant se compose de deux droites se coupant en ce point.

Cette conique est toujours une hyperbole équilatère ayant, comme H, ses asymptotes également inclinées sur BO et BO_1. Il y a avantage, pour cette partie du calcul, à prendre pour axes les bissectrices des angles formés par BO, BO_1, de manière que

$$X = x\cos\theta - y\sin\theta, \qquad X_1 = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$Y = (x-\alpha)\sin\theta + (y-\beta)\cos\theta,$$
$$Y_1 = (y-\beta)\cos\theta - (x-\alpha)\sin\theta.$$

[1] Le relation (11') aurait lieu en même temps que (11) si les deux membres en étaient simultanément nuls, c'est-à-dire si l'on avait, à la fois,

$$\frac{Y}{u-1} \cdots X \qquad Y_1 \cdots \pm i \frac{X_1}{u}$$

(les signes à prendre dans ces deux inégalités étant indépendants l'un de l'autre). Mais, s'il en était ainsi, (5) donnerait pour la valeur commune des deux membres de la première égalité précédente, la valeur $\pm c$, et (5') pour les deux membres de la seconde, la valeur commune $\pm c_1$. Un tel point double (imaginaire, d'ailleurs comme le serait toute la figure dans ce cas) rentrerait encore dans la catégorie déjà étudiée puisqu'il appartiendrait à la fois à deux des droites (9).

[2] Cette incompatibilité disparaîtrait pour $u = 0$ ou $u - 1 = 0$. Mais alors on aurait aussi $X = 0$ ou $Y = 0$, de sorte qu'on retomberait sur l'un des points A, B.

α et β désignant les coordonnées du point A par rapport aux axes ainsi choisis. Dans ces conditions, l'équation de la conique (12) s'écrit, pour $u = u_0$,

$$\frac{xy}{u} \quad \frac{(x-\alpha)(y-\beta)}{u-1} + \frac{c_1^2 - c^2}{2\theta} = 0$$

et son centre (une fois trouvée la valeur u_0 qu'il faut donner à u) est le point

Le point double cherché ω est donc sur la droite AB et la divise dans le rapport u_0, soit

$$\overline{AB}$$

On vérifie à nouveau sans difficulté que ce choix du point ω annule également la dérivée par rapport à u.

Il nous reste à écrire que les coordonnées de ω vérifient, non pas seulement l'équation (12), mais les deux équations (5), (5'). Comme les valeurs de X, Y, X_1, Y_1 en ω s'obtiennent (au signe près) en multipliant par u ou $u - 1$ les longueurs OA, OB, O_1A, O_1B, il vient ainsi

$$u_0 . \overline{AB}^2 - \overline{OB}^2 = c \qquad - \overline{O_1B}^2 = c$$

La condition pour que le point double existe est donc

$$\overline{OB}^2 - \overline{O_1B}^2 = c_1^2 - c^2,$$

condition suffisante en même temps que nécessaire, car si elle est remplie, les deux équations (14) sont compatibles en u_0, après quoi le point (13) satisfait à toutes les conditions imposées au point ω. En tenant compte de (14), on constate aisément que ce point est le pied de la hauteur du triangle AP'B (ou AQ'B).

5. Le mode de construction par régions, si simple et si intuitif, est, comme on le sait, une méthode incomplète. Il fournit sur la courbe proposée un certain nombre de renseignements, mais non tous ceux dont on a besoin pour la connaissance, même qualitative (celle dont il s'agit en ce moment), de sa forme. Par exemple, il peut y

avoir des régions où la méthode *permet* le passage de la courbe, sans prouver qu'elle *doit* y passer (Exemple : la région numérotée 4 sur la figure 1).

Peut-on obvier à cet inconvénient ?

Pour cela, il importe d'en pénétrer la raison, et cette raison est facile à indiquer.

Pour construire la courbe

(15) $$y) =$$

la méthode des régions consiste :

1° A discuter le signe de chacun des deux membres, de manière à éliminer toutes les régions du plan où ce signe n'est pas le même;

2° A déterminer les points communs aux deux lignes $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$, points qui appartiennent nécessairement à la courbe étudiée.

Or, les éléments ainsi notés ne sont pas particuliers à la seule courbe (15) : ils lui sont évidemment communs avec toutes les courbes

λ désignant une constante positive quelconque (ou même une quantité variable, pourvu qu'elle soit toujours positive pour x et y réels). La méthode ne saurait donc déceler d'autres propriétés que celles qui sont communes à toutes les courbes (16).

Par contre, nous pourrons compléter les indications ainsi acquises si nous arrivons à étudier la manière dont se forme cette courbe (16) lorsque λ varie de 0 à $+\infty$.

Pour $\lambda = 0$, on a $\Phi(x, y) = 0$, et pour $\lambda = \infty$, $\Psi(x, y) = 0$, lignes dont, par hypothèse, la forme est bien connue.

D'autre part, si l'on a construit un arc de la courbe

$$\mathcal{F}(x, y) = \lambda_0$$

(λ_0 étant une constante) sur lequel n'existe aucun point singulier, de sorte que $\mathcal{F}$ y admet des dérivées partielles continues et que $\mathcal{F}'_x$, $\mathcal{F}'_y$ ne s'y annulent jamais simultanément, on pourra affirmer que la courbe

ε étant un nombre positif ou négatif très petit, présente un arc très voisin du premier et de forme tout analogue : c'est une conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites.

Un changement d'aspect de la courbe $\mathcal{F}(x, y) = \lambda$, lorsque λ varie, ne peut donc avoir lieu que :

1° Au voisinage des points où $\mathcal{F}$ cesse d'avoir des dérivées continues. Si nous nous bornons au cas où la fonction $\mathcal{F}$ est rationnelle (ou se comporte comme une fonction rationnelle), ces points sont ceux où $\mathcal{F}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, soit, pour $\mathcal{F} = \frac{\Phi}{\Psi}$, les points communs à $\Phi = 0$, $\Psi = 0$;

2° Au voisinage des points où $\mathcal{F}'_x = \mathcal{F}'_y = 0$.

Le premier cas se discute par les méthodes classiques d'étude d'une courbe autour d'un de ses points. Dans le problème particulier considéré dans ce qui précède, les points communs aux lignes $\Phi(x, y) = 0$, $\Psi(x, y) = 0$ sont tous doubles pour chacune d'elles; ce sont, pour la courbe (16), des points doubles *permanents*, c'est-à-dire points doubles quel que soit λ. En un tel point (x_0, y_0), il y aura deux tangentes, définies en égalant à zéro un polynome du second degré du type

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 \\ - \lambda[a'(x - x_0)^2 + 2b'(x - x_0)(y - y_0) + c'(y - y_0)^2]$$

(a, b, c, a', b', c' étant des coefficients numériques); et, dans la région du plan qui avoisine ce point, un changement de forme de la courbe pourra avoir lieu au cours de la variation de λ, par suite du changement de signe du discriminant de ce polynome, le point (x_0, y_0) passant alors du rôle de point double réel à celui de point isolé par l'intermédiaire d'un rebroussement.

Dans le second cas, le point considéré est point double *accidentel*, c'est-à-dire point double pour une valeur déterminée λ_0 de λ et pour celle-là seulement. Pour $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$, la courbe aura sensiblement, au voisinage de ce point, la même forme que la conique

$$a(x - x_0)^2 + 2b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 = \varepsilon,$$

a, b, c étant encore des constantes convenablement choisies; autrement dit, si $b^2 - ac < 0$, elle passera (ε changeant de signe) du réel

(très petit ovale autour du point considéré) à l'imaginaire. Si, au contraire, le point double correspondant à $\lambda = \lambda_0$ est à branches réelles (et distinctes), la courbe aura, près de ce point, sensiblement la forme de deux petits arcs d'hyperbole dont chacun, lorsque ε changera de signe, se coupera en deux, chaque moitié allant se raccorder avec la moitié correspondante de l'arc opposé.

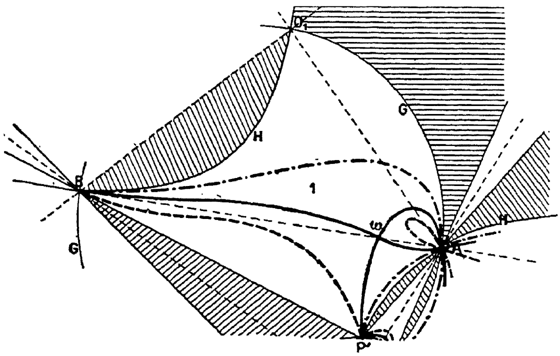
Si donc on sait étudier ces points doubles — comme, d'autre part, les mêmes considérations permettent de dessiner la forme de la courbe pour λ très petit ou très grand — on possédera, pour cela même, tous les renseignements nécessaires.

6. Appliquons à la courbe (7). Nous devons multiplier le second membre de son équation par λ; mais, à cause de l'homogénéité que présentent ses deux membres par rapport à c et c_1, nous voyons que cela revient à changer c, c_1 en $c\sqrt{\lambda}$, $c_1\sqrt{\lambda}$. Nous obtiendrons donc la famille de courbes correspondant à (16) en imaginant que, dans l'énoncé de notre problème, nous commencions par ne nous donner (outre les positions des quatre axes) que le *rapport* $\frac{c_1}{c}$ des distances focales, et faisant varier ensuite ces dernières, simultanément et proportionnellement l'une à l'autre, de 0 à ∞.

La connaissance du rapport $\frac{c_1}{c}$ suffit d'ailleurs à construire toutes les lignes séparatrices (8), (9) (*fig.* 1). On ombrera, à la manière ordinaire, de deux en deux les régions déterminées par ces lignes. La disposition étant celle qui est représentée figure 1, si, en outre, le point de rencontre A des axes *focaux* est bien celui qui est désigné ainsi sur la figure, les régions *négatives*, c'est-à-dire celles où les deux membres de (7) auront des signes contraires et où, par conséquent, la courbe ne pourra pas passer, seront celles que nous avons ombrées, les régions permises à la courbe autour de A étant celles qui contiennent les directions $Y = 0$, $Y_1 = 0$, tandis que l'inverse a lieu autour du point B où se coupent les axes non focaux. Le point double B est d'ailleurs à tangentes réelles pour toute valeur positive de λ tandis que A, qui est à tangentes réelles pour $\lambda = 0, \infty$, est point isolé entre les deux valeurs $\lambda = \frac{\overline{OA}^2}{c^2}$ et $\lambda = \frac{\overline{O_1A}^2}{c_1^2}$, ces dernières correspondant à des points de rebroussement. C'est ce qu'on recon-

naît immédiatement sur l'équation (7), en se plaçant successivement au voisinage du point ($Y = Y_1 = 0$) et du point ($X = X_1 = 0$), et c'est ce qu'on peut d'ailleurs voir géométriquement d'après l'énoncé du problème [1].

Fig. 2.



Quant aux points P, P', Q, Q', ils sont toujours à tangentes réelles [2] pour toute valeur réelle de λ. Enfin, il en est de même [3] du point ω.

Dans ces conditions, au cours de la variation de λ, il ne se produira de changement de forme (toujours au sens qualitatif du mot) que

(1) Le point B correspond au cas où les coniques variables c, c_1 se réduisent à deux hyperboles infiniment aplaties suivant leurs axes non transverses ($u = 1$). Le point A correspond à $u = 0$, c'est-à-dire au passage d'ellipses infiniment aplaties chacune suivant son segment focal à des hyperboles infiniment aplaties suivant les prolongements de leurs segments focaux. De telles courbes ont leurs points d'intersection réels si A est intérieur aux deux segments focaux ou extérieur à tous deux; imaginaires, s'il est intérieur à l'un et extérieur à l'autre.

(2) Il en est ainsi, quelle que soit la disposition de figure. En tenant compte de ce que G, H, Γ sont, à des facteurs constants près, identiquement égaux à $D_1D'_2 - D'_1D_2$, $D'_1D'_2 - D_1D_2$, $D_1D'_1 + D_2D'_2$, on voit que, en P, par exemple, le faisceau des tangentes est, quel que soit λ, de la forme $D_1^2 - D_2^2 + mD_1D_2 = 0$.

(3) Les tangentes en ω à la courbe lieu du point (x, y, u) dans l'espace s'obtiennent en coupant par le plan tangent à la surface (5) ou à la surface (5') le cône tangent à (12'). Or, en posant, dans cette dernière, $u = u_0 + u'$, $x = \alpha u_0 + x'$, $y = \beta u_0 + y'$, on voit que ce cône tangent se décompose en deux plans $x' = \alpha u'$, $y' = \beta u'$. Dans le plan des xy, les tangentes sont symétriques des droites (12) par rapport à AB.

dans les régions numérotées 1, 2, 3, 4 sur la figure 1. Elles correspondent aux valeurs successives

$$\lambda_1 = \overline{O_1A}^2 - \overline{OA}^2 \qquad [illegible] \qquad \lambda_3 = \overline{OA}^2$$

du paramètre λ. La figure 2 montre les dispositions successives de la courbe dans la région 1, pour $\lambda < \lambda_1$ (trait ponctué), $\lambda = \lambda_1$ (trait

Fig. 3.

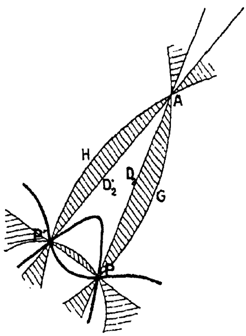
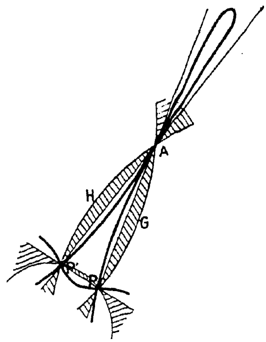


Fig. 3 *bis*.



plein), $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ (trait mixte). La boucle de sommet A diminue ensuite jusqu'à ce qu'on ait $\lambda = \lambda_2$ (rebroussement dans la région 2). Le point A reste point isolé jusqu'à $\lambda = \lambda_3$ et les changements de forme qui se produisent à partir de ce moment intéressent les régions 3 et 4. Les formes présentées par la courbe, dans ces régions, pour $\lambda < \lambda_3$ et $\lambda > \lambda_3$ sont représentées figures 3 et 3 *bis*.

Bien entendu, si les rôles des points A et B — autrement dit ceux des axes focaux et non focaux — étaient intervertis, la figure gardant par ailleurs la disposition représentée figure 1, le point ω n'interviendrait pas, la valeur correspondante de λ étant négative, et les seuls changements de forme seraient dus aux changements de nature du point double B (devenu A).

Note du Comité de rédaction. — Ce travail montre l'intérêt que M. Hadamard porte à l'Enseignement secondaire. On trouvera de nombreuses notes analogues dans les *Nouvelles Annales* et dans l'*Enseignement scientifique* (*voir* la liste des travaux).

SUR

LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE

(*Addition à l'article :* **Sur les récents progrès de la géométrie anallagmatique**)

(*Nouvelles Annales de mathématiques*, 6e série, t. II, 1927.)

A la suite de l'article sur les récents progrès de la géométrie anallagmatique (article qui sera désigné dans ce qui suit par l'abréviation A), M. Cartan m'a communiqué plusieurs compléments remarquables. J'indique ici le plus simple d'entre eux.

Parmi les diverses congruences paratactiques qui ont même sphère imaginaire principale (1), distinguons deux espèces (2), suivant que les sens qui se correspondent sur deux cercles de la congruence sont *dextrorsum* ou *sinistrorsum*, l'un par rapport à l'autre. Dans ces conditions, *deux congruences paratactiques de même*

(1) Je substitue ici cette dénomination à celle de sphère « fondamentale » employée précédemment : le mot de sphère *principale* avait été employé par les auteurs qui se sont occupés de cette question ou de la cyclide de Dupin, et il n'y a pas de raison de l'abandonner.

(2) Cette distinction se rattache à une autre relative aux génératrices de la sphère imaginaire principale et qui avait été antérieurement, entre M. Cartan et nous-même, l'objet d'un échange de vues. Au lieu que sur une sphère réelle, deux génératrices imaginaires conjuguées sont toujours de systèmes différents, sur une sphère imaginaire pure, deux génératrices conjuguées sont du *même* système, de sorte qu'il doit être évidemment possible de rattacher à des constructions *réelles* la distinction entre les deux systèmes de génératrices : et c'est à quoi répond précisément, comme l'avait remarqué M. Cartan, la distinction indiquée dans le texte.

Beaucoup d'autres interprétations seraient encore possibles dans le même but,

sphère principale et de même espèce se coupent sous un angle constant en tout point de l'espace.

M. Cartan rattache ce théorème aux interprétations imaginaires que l'on peut donner des figures anallagmatiques réelles que nous considérons. Proposons-nous, conformément au programme que nous nous étions tracé précédemment, d'en donner une démonstration directe et, tout d'abord, d'établir le suivant dont il découle immédiatement :

Deux opérations paratactiques de même sphère principale et d'espèces différentes sont toujours permutables.

On peut considérer ce dernier fait comme démontré par celui que nous avons établi dans notre précédent article (A, 34), relativement aux diverses positions que prend un cercle C lorsqu'on lui applique le groupe d'opérations paratactiques défini par une congruence dont un cercle C coupe C′ en deux points opposés. Nous avons constaté, en effet, que ces positions successives font partie d'une seconde congruence paratactique, permutable avec la première et (ce qui revient d'ailleurs au même) ayant avec elle deux cercles conjugués communs.

Or, deux congruences paratactiques d'espèces différentes et de même sphère principale, peuvent toujours être considérées comme définies de cette façon : car une congruence paratactique est définie par sa sphère principale, son espèce et un de ses cercles. Dans ces conditions, la proposition devient évidente.

Au reste, on peut (et cette méthode pourrait, au fond, remplacer celle de notre n° 34 précédent) déterminer directement les deux cercles conjugués communs aux deux congruences. Par les deux points opposés a, $\bar{a}$, communs à C et à C′, nous pouvons en effet faire passer un cercle Γ et un seul qui soit perpendiculaire à tous

si l'on ne s'astreignait pas à leur donner une forme anallagmatique. C'est ainsi que n'importe quel paraboloïde hyperbolique équilatère de paramètre a ayant son sommet en O coupe la sphère imaginaire de centre O et de rayon $a\sqrt{-1}$ suivant quatre génératrices appartenant respectivement aux deux systèmes. Or, sur le paraboloïde, les deux systèmes se distinguent l'un de l'autre, dans le domaine réel, par le sens dans lequel tournent les génératrices de l'un d'eux autour d'une génératrice déterminée quelconque de l'autre.

deux. Ceci fait, une série de cercles paratactiques à C et, de même, une série de cercles paratactiques à C′, pourront s'obtenir par la construction du n° 18 (article précédent), laquelle fait intervenir un angle arbitraire θ, celui dont tourne autour de Γ une sphère variable passant primitivement par C ou par C′. L'angle θ est d'ailleurs déterminé lorsqu'on se donne l'un des points opposés m, $\overline{m}$ où le cercle variable coupe Γ (il est lié au rapport anharmonique $a\overline{a}m\overline{m}$ par la relation mentionnée au n° 5 de notre précédent article). Cela posé, si les deux congruences auxquelles appartiennent respectivement C et C′ sont d'espèces différentes, la rotation de la sphère variable s'effectuera, pour un même déplacement des points m, $\overline{m}$ en sens contraires, et l'on pourra, par conséquent (de deux manières différentes), disposer de l'angle θ de manière que la construction à laquelle nous venons de faire allusion donne le même cercle de part et d'autre.

A l'aide du résultat que nous venons d'obtenir, celui de M. Cartan s'obtient sans difficulté. Soient, dans l'espace où l'on considère deux congruences paratactiques ($\mathcal{C}$), ($\mathcal{C}'$) de même sphère principale et de même espèce, deux points quelconques a, b, non opposés entre eux, et par chacun desquels nous ferons passer des cercles qui appartiennent respectivement aux deux congruences. Par a et b, d'autre part, il passera un cercle orthogonal à la sphère principale et qui pourra servir à définir une congruence paratactique d'espèce opposée à la première. Puisque, dans ces conditions, il y a permutabilité, l'opération paratactique résultant de cette construction, et qui permet de passer du point a au point b, transforme la figure tracée en a en la figure correspondante relative à b. C. Q. F. D.

Le résultat précédent fournit la solution d'une question que nous avions laissée ouverte (A, n° 39, note). A cet effet, on en déduira d'abord la remarque suivante :

Soient ($\mathcal{C}$), ($\mathcal{C}'$) deux congruences paratactiques de même sphère principale et de même espèce. Autour d'un cercle C quelconque de la première, faisons tourner la seconde d'un certain angle θ, de manière à obtenir une troisième congruence analogue à la première. *La congruence* ($\mathcal{C}''$) *ainsi obtenue est indépendante du choix du cercle* C *dans la première congruence.*

Prenons, en effet, deux positions successives quelconques (C_1, C_2) de ce cercle dans la congruence à laquelle il appartient et, sur C_1 et C_2 respectivement, deux points a_1, a_2 par lesquels nous ferons passer les cercles C'_1, C'_2 qui appartiennent à ($\mathcal{C}'$) et qui coupent les premiers, d'après ce qui vient d'être démontré, sous un même angle α. Si maintenant nous faisons tourner de l'angle θ, C'_1 autour de C_1 et C'_2 autour de C_2, nous obtenons deux cercles C''_1 et C''_2 tels que les trièdres ainsi formés en a_1 et en a_2, par les tangentes aux différents cercles qui partent soit de l'un, soit de l'autre de ces points, soient égaux. Appliquant enfin à nouveau le résultat de M. Cartan aux deux congruences données et à celle (de même sphère principale et de même espèce) qui est définie par le cercle C''_1, on voit que cette dernière contient nécessairement C''_2 : ce qui est le fait à démontrer.

On voit donc que le fait de *faire tourner d'un angle* θ (en un sens donné) *une congruence paratactique autour d'une autre* (de même sphère principale et de même espèce) a un sens bien déterminé [1].

Cela posé, soient pris deux points déterminés quelconques a, b de l'espace et prenons les symétriques a', b', de chacun d'eux par rapport aux différents cercles d'une congruence paratactique ($\mathcal{C}$) donnée. Il s'agit de trouver l'opération qui transforme l'une dans l'autre les deux figures (sphériques) décrites l'une par a', l'autre par b'.

Pour cela, nous n'avons qu'à observer qu'il existe une opération paratactique bien déterminée (en laissant de côté le cas où a et b sont opposés, dans lequel la réponse à la question posée est immédiate), de même sphère principale et de même espèce que ($\mathcal{C}$), qui change a en b. L'opération demandée s'obtient en faisant tourner la précédente de π autour de ($\mathcal{C}$).

Mais il semble que chaque propriété de la figure vraiment merveilleuse, découverte par E. von Weber et M. A. Bloch, ouvre la voie

---

[1] Pour $\theta = \pi$, la démonstration peut se donner sous une autre forme. Prenons d'abord la symétrique ($\mathcal{C}'_0$) de la congruence ($\mathcal{C}'$) par rapport à un premier cercle C_0 de ($\mathcal{C}$). La symétrique par rapport à un autre cercle analogue arbitraire C se déduira de la première par une double symétrie relative à C_0 et à C, c'est-à-dire (A, n° 26) par une transformation paratactique, laquelle est d'espèce opposée à celle que définit ($\mathcal{C}$) et, par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, permutable avec elle.

à d'autres résultats plus curieux encore. La solution que nous venons d'obtenir appelle une généralisation évidente. Elle s'étend d'elle-même au cas où les points a', b', au lieu d'être les symétriques de a, b par rapport à un cercle variable C de la congruence $(\mathcal{C})$, se déduisent des premiers par une rotation d'un angle donné *quelconque* θ autour du cercle C. Le point b', dans ces nouvelles conditions, se déduit encore de a' par une opération sphérique que l'on peut assigner, transformée par la rotation dont il s'agit de celle qui change a en b.

On est conduit naturellement à se demander quels sont les lieux ainsi décrits par les points a', b'. *Ce sont encore des sphères.* La première démonstration donnée à cet égard pour le cas de $\theta = \pi$ (A, n° 36) reste en effet valable pour le cas actuel. α et $\bar{\alpha}$ étant les transformés de a et de son opposé par l'opération d'angle $\frac{\theta}{2}$, le point a' sera l'inverse de a par rapport à une sphère variable passant par α et $\bar{\alpha}$ et décrira, par conséquent, la sphère qui passe par a et par rapport à laquelle α et $\bar{\alpha}$ sont inverses l'un de l'autre.

Il resterait à comparer entre elles les diverses figures ainsi obtenues lorsque θ varie.

On remarquera que si, après avoir construit a' par rotation de a autour de C, on fait tourner à son tour ce point a' du même angle θ autour du conjugué de C, on obtient un point a_1 indépendant du choix de C dans la congruence, à savoir le transformé de a par l'opération d'angle θ. Le lieu du point a' ne change donc pas si l'on remplace a par a_1 en renversant en même temps le sens de l'angle de rotation. C'est une sphère qui peut, d'après cela, être définie comme passant par les points a, a_1 et orthogonale en ces points au cercle de la congruence qui les contient. Les points α, $\bar{\alpha}$ peuvent être considérés comme les « milieux », en un sens généralisé, des deux arcs déterminés sur ce cercle par a et a_1 (ils en seraient les milieux au sens ordinaire du mot, si le conjugué du cercle en question était une droite).

Il était évident *a priori* que l'opération qui change a' en b' dans l'un ou l'autre des cas que nous venons d'étudier, devait être paratactique. La sphère principale de la congruence donnée permet, en effet, de définir une géométrie riemannienne dans laquelle les diverses

transformations sphériques intervenant dans nos raisonnements représentent les déplacements; et l'opération cherchée doit évidemment présenter cette propriété que la distance riemannienne d'un point à son transformé est constante. Or, cette propriété appartient aux transformations paratactiques et à celles-là seulement (comme on le voit en prenant le point à transformer successivement sur chacun des axes conjugués de la transformation [1]).

Ceci, combiné encore avec le résultat de M. Cartan, permet d'établir le fait (évident lorsqu'on fait intervenir les génératrices de la sphère principale) que *les transformations paratactiques de même sphère principale et de même espèce forment un groupe.*

Appliquons, en effet, à un point quelconque a une première transformation paratactique qui le change en a', puis à celui-ci une seconde transformation qui le change en a''. Les distances riemanniennes aa', $a'a''$ sont constantes, et il en est de même de l'angle en a', d'après la proposition de M. Cartan. Or, le triangle $aa'a''$ obéit aux lois de la géométrie riemannienne, qui sont celles de la géométrie sphérique.

Donc la distance riemannienne aa'' est aussi constante et la transformation correspondante est nécessairement paratactique (et de même espèce que les premières, en vertu de la continuité).

Il pourrait d'ailleurs être intéressant d'étudier de plus près la composition des transformations paratactiques de même espèce; et ceci introduirait sans doute les propriétés des cercles conjugués telles que nous les avons considérées dans tout ce qui précède, propriétés qui méritent, elles aussi, de retenir l'attention quoiqu'elles soient connues à titre de résultats de géométrie non euclidienne.

C étant un cercle quelconque orthogonal à la sphère principale Σ, son conjugué est, nous l'avons vu, déterminé entièrement par le

[1] Si un seul de ces axes était réel, il aurait sur lui deux points invariants, de sorte que la propriété ne pourrait avoir lieu. Dans une transformation quelconque à axes réels mais à angles différents φ et ψ, la distance riemanienne δ d'un point a à son transformé est donné par

$$\cos\delta = \cos^2\tau\cos\varphi + \sin^2\tau\cos\psi,$$

en désignant par τ l'angle qui a pour tangente le rapport k des puissances réduites (A, 32) du point a aux deux axes.

fait qu'il est : 1° axial au premier; 2° orthogonal, lui aussi, à la sphère principale. Supposons maintenant qu'on ne donne pas le cercle C, mais qu'on en connaisse seulement le point a ou, ce qui revient au même, deux points opposés, a, $\bar{a}$. Le conjugué C' sera sur une sphère connue à savoir celle qui est orthogonale à Σ et par rapport à laquelle a et $\bar{a}$ sont inverses l'un de l'autre.

La dualité ainsi obtenue, correspondant à la transformation par polaires réciproques, possède une propriété remarquable que ne possède pas cette dernière à savoir que deux droites riemanniennes C_1, C_2 (c'est-à-dire deux cercles othogonaux à Σ) cosphériques entre elles, se coupent sous le même angle que leurs transformées. A trois cercles passant par un même point (et par son opposé) et y formant un trièdre, correspondent trois cercles formant, sur une même sphère, un triangle sphérique, dont les éléments sont ceux du trièdre supplémentaire du premier.

Note du Comité de Rédaction. — On trouvera dans la nouvelle édition des *Leçons de Géométrie* un exposé très complet sur la géométrie anallagmatique.

HYDRODYNAMIQUE

SUR

LES GLISSEMENTS DANS LES FLUIDES

(Note II des *Leçons sur la Propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, 1903.)

Nous avons vu, au Chapitre V, que, outre les ondes (lesquelles n'existent que dans les fluides compressibles), les fluides quelconques, compressibles ou non, peuvent présenter des discontinuités stationnaires. On sait d'ailleurs que celles-ci peuvent être *absolues*, c'est-à-dire que deux portions du fluide peuvent glisser l'une sur l'autre à la façon de deux corps différents.

Depuis Helmholtz, qui, le premier, a attiré l'attention sur cette catégorie de mouvements (¹), ceux-ci jouent un rôle important dans plusieurs théories hydrodynamiques; leur existence est invoquée pour expliquer diverses circonstances paradoxales, telles que l'écoulement des liquides en présence de parois anguleuses, ou encore le résultat connu sous le nom de *paradoxe de d'Alembert* (absence de résistance opposée par un liquide à un solide symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à la direction du mouvement).

De telles explications souffrent toutefois une objection commune à laquelle nous avons déjà fait allusion dans le texte (Chap. V). Les glissements dont nous venons de parler sont, en effet, possibles, en ce sens que rien (en l'absence de viscosité) ne s'oppose à leur *persistance*, une fois qu'ils se sont produits entre deux régions quelconques du fluide; mais nous allons voir que leur *naissance* est impossible, du moins dans les conditions où se place l'Hydrodynamique rationnelle.

(¹) *Monatsber. der Berl. Ac. der Wissensch.*, 23 avril

Si même, sur une surface de glissement, la vitesse de glissement est nulle en un point déterminé à l'instant t_0, elle restera nulle entre les mêmes molécules à tout instant ultérieur.

Il est toutefois essentiel de tenir compte de la restriction que nous avons apportée à notre énoncé il y a un instant. On rencontre, en effet, dans l'étude des fluides naturels, des cas qui échappent au raisonnement que nous allons présenter, comme à tous ceux qui reposent sur les équations classiques de l'Hydrodynamique telles que nous les avons écrites dans le texte (Chap. III et V) et où, par conséquent, rien n'exclut plus la production de discontinuités absolues au cours du mouvement.

Tels sont ceux dans lesquels, la pression s'annulant, des cavités se creusent momentanément dans la masse fluide considérée. Ces cavités se referment en général par des remous dans lesquels les molécules appartenant à des régions différentes se mélangent entre elles, de sorte qu'il devient impossible d'admettre en aucun point l'hypothèse de continuité du n° 45.

Ce que nous allons prouver est donc simplement qu'une telle singularité (ou toute autre analogue, pourvu que les hypothèses qui servent de base à l'hydrodynamique rationnelle cessent d'être vérifiées) [1] est nécessaire pour qu'un glissement se produise dans une période quelconque du mouvement, s'il n'en existait pas avant cette période.

La démonstration repose sur ce fait, constaté au n° 244, que (moyennant les hypothèses fondamentales en question) à chaque instant d'un glissement relatif, le saut d'accélération est normal à la surface S, le long de laquelle la discontinuité a lieu.

Proposons-nous de former les équations différentielles qui expriment cette condition.

Reprenant les mêmes notations qu'au n° 249, nous désignerons par ξ, η des coordonnées curvilignes prises sur S, considérée dans

[1] Les équations générales de l'Hydrodynamique sont également modifiées dans le cas du frottement; mais celui-ci ne paraît pas pouvoir être invoqué pour expliquer la naissance des glissements, car il a pour effet, au contraire, de détruire ceux qui pourraient exister initialement.

son état initial S_0. Les coordonnées cartésiennes x, y, z d'une molécule de S *appartenant à la région* 1 seront des fonctions de ξ, η et du temps t :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, t),\\ y &= y(\xi, \eta, t),\\ z &= z(\xi, \eta, t).\end{aligned}\right.$$

Il en sera de même des coordonnées x', y', z' d'une molécule de S appartenant à la région 2; mais les expressions seront différentes dans les deux cas. Puisqu'il y a glissement le long de S, la molécule de la région 1 qui avait, dans l'état initial, les coordonnées curvilignes ξ, η coïncidera, à l'instant t, avec celle de la région 2 qui avait dans l'état initial, les coordonnées ξ', η' (en général différentes, des premières). Si ξ' et η' sont donnés, ξ et η seront des fonctions de t, qu'il suffira de substituer dans les équations (1) pour avoir le mouvement de la molécule (x', y', z').

Ce sont ces fonctions que nous avons à étudier.

L'accélération de la molécule (x, y, z) s'obtiendra en différentiant deux fois les formules (1) par rapport à t, sans faire varier ξ et η; elle aura pour composantes

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

L'accélération de la molécule (x', y', z') s'obtiendra en substituant, au contraire, à ξ, η, leurs valeurs en fonction de t : elle aura pour composantes :

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \ldots \frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial t}\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\,\partial t}\frac{d\eta}{dt}.$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \ldots \frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\,\partial t}\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\,\partial t}\frac{d\eta}{dt},$$

$$\frac{d^2 z'}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \ldots \frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial\eta}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$$
$$+ 2\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\,\partial t}\frac{d\xi}{dt} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial\eta\,\partial t}\frac{d\eta}{dt}$$

Il suffira de faire passer dans les premiers membres les termes $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ pour obtenir, aux seconds membres, les composantes du saut d'accélération Nous écrirons que le segment ainsi obtenu est normal à S en écrivant qu'il est perpendiculaire aux deux directions

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}, \frac{\partial y}{\partial\xi}, \frac{\partial z}{\partial\xi}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial x}{\partial\eta}, \frac{\partial y}{\partial\eta}, \frac{\partial z}{\partial\eta}$$

Ceci donne les deux relations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dt^2}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)+\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial t}\right)+2\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\,\partial t}\right)=0,\\
&\frac{d^2\xi}{dt^2}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)+\frac{d^2\eta}{dt^2}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\,\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}\right)\\
&\qquad+2\frac{d\xi}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial t}\right)+2\frac{d\eta}{dt}\cdot\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta\,\partial t}\right)=0,
\end{aligned}\right.$$

où les signes Σ signifient qu'il faut remplacer, dans les dérivées partielles, x par y, puis par z et ajouter les trois expressions ainsi obtenues.

Nous voyons s'introduire ici les coefficients

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2, \qquad F=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial x}{\partial\eta}\right), \qquad G=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2$$

de l'élément linéaire

$$E\,d\xi^2+2F\,d\xi\,d\eta+G\,d\eta^2$$

de la surface S à l'instant considéré : ce sont eux qui figurent comme coefficients des dérivées secondes de ξ et η, dans les équations précédentes.

D'autre part, leurs dérivées partielles permettent d'exprimer les coefficients de $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2$, $2\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt}$, $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2$, savoir

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\xi}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\eta}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}=\frac{\partial F}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\xi}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}=\frac{\partial F}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\eta}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\xi\,\partial\eta}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\xi}, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial\eta}$$

Elles permettent également d'exprimer deux des coefficients de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$: celui de $\frac{d\xi}{dt}$ dans la première équation :

$$2\sum \frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t}$$

et celui de $\frac{d\eta}{dt}$ dans la seconde

$$2\sum \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\frac{\partial^2 x}{\quad\partial t} = \frac{\quad}{\partial t}$$

Mais il n'en est pas de même des deux coefficients restants

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\,\frac{\partial^2 x}{\partial \eta\,\partial t}, \qquad\qquad \frac{\quad}{\partial \xi\,\partial t}.$$

Leur somme seule peut se calculer à l'aide des coefficients (3) : elle est égale à $\frac{\partial F}{\partial t}$.

Il était d'ailleurs évident *a priori* que, dans les équations (2), devait s'introduire un élément distinct de la forme de la surface S. En effet, le mouvement d'une molécule (x', y', z') peut être considéré comme résultant du mouvement de la surface S prise dans la région 1 [c'est-à-dire celui des molécules (x, y, z)], et du mouvement de (x', y', z') par rapport à (x, y, z) : le premier de ces mouvements pouvant être regardé comme un mouvement d'entraînement et le second comme un mouvement relatif. Or on sait que, dans la théorie des mouvements relatifs, les accélérations ne se composent pas linéairement comme les vitesses : si, par exemple, le mouvement d'entraînement était celui d'un système invariable, on aurait à tenir compte de l'accélération complémentaire de Coriolis, laquelle dépend de la rotation instantanée de ce système. On doit donc s'attendre à l'intervention d'une rotation de cette espèce dans la question actuelle, et même le théorème de Coriolis auquel nous venons de faire allusion nous indique la partie de cette rotation qui jouera vraisemblablement un rôle. Si, en effet, la rotation en question était tangente à S, comme il en est de même de la vitesse relative, le théorème de Coriolis (en le supposant applicable) donnerait une accélération complémentaire normale. Comme l'évanouissement des

composantes *tangentielles* du saut d'accélération nous intéresse seul, nous ne devons avoir à utiliser que la composante normale de la rotation.

Il est aisé de voir que les choses se passent effectivement ainsi : il suffit de décomposer le mouvement de S en une déformation pure et une rotation, comme nous l'avons fait aux nos 51 et 62. Il est vrai qu'au lieu d'une déformation de l'espace, nous n'avons ici que la déformation d'une surface; mais, pour ramener ce dernier cas au premier, il suffit d'imaginer que la surface S entraîne avec elle ses normales, chacune de celles-ci se déplaçant comme une droite invariable. On pourra alors, en désignant par le symbole d les différentielles qui correspondent à des déplacements dans l'espace à l'instant considéré, par u, v, w, les composantes de la vitesse du point (x, y, z) et par φ une forme quadratique en dx, dy, dz, écrire les équations du no 62 sous la forme

$$du = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial(dx)} + q\,dz - r\,dy,$$

$$dv = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial(dy)} + r\,dx - p\,dz,$$

$$dw = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial(dz)} + p\,dy - q\,dx$$

$$\left(u = \frac{\partial x}{\partial t},\quad v = \frac{\partial y}{\partial t},\quad w = \frac{\partial z}{\partial t}\right),$$

et, par conséquent, en prenant dx, dy, dz proportionnels successivement à $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}$ et à $\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$, on aura

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)} + q\frac{\partial z}{\partial \xi} - r\frac{\partial y}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi\,\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)} + r\frac{\partial x}{\partial \xi} - p\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)} + p\frac{\partial y}{\partial \xi} - q\frac{\partial x}{\partial \xi};$$

et les équations analogues où ξ est remplacé par η.

Multiplions maintenant les trois premières de ces équations respectivement par $\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}$; les trois dernières par $\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}$, et retran-

chons la somme des trois derniers produits de la somme des trois premiers. Les termes qui dépendent des dérivées de φ s'élimin et il restera

$$\left(\sum \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta\,\partial t} - \sum \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial t}\right)\partial t \qquad \begin{vmatrix} p & q & r \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 2R\sqrt{EG - F^2},$$

en désignant par R la composante normale de la rotation (p, q, r).

Donc enfin, les équations (2) s'écrivent

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & E\frac{d^2\xi}{dt^2} + F\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial E}{\partial \xi}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial E}{\partial \eta}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \left(2\frac{\partial F}{\partial \eta} - \frac{\partial G}{\partial \xi}\right)\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] \\ & \qquad\qquad + \frac{\partial E}{\partial t}\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{\partial F}{\partial t} - 2R\sqrt{EG - F^2}\right)\frac{d\eta}{dt} = 0, \\ & F\frac{d^2\xi}{dt^2} + G\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{1}{2}\left[\left(2\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{\partial E}{\partial \eta}\right)\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial G}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial G}{\partial \eta}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] \\ & \qquad\qquad + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + 2R\sqrt{EG - F^2}\right)\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial G}{\partial t}\frac{d\eta}{dt} = 0. \end{aligned}\right.$$

Lorsque la surface S est fixe ainsi que les molécules de la région 1 situées sur cette surface, les deux équations que nous venons d'obtenir se réduisent à celles qui définissent le mouvement d'un point sur S, en l'absence de force accélératrice; ce qui était évident *a priori*, puisque ces dernières s'obtiennent en exprimant que l'accélération est normale.

Dans tous les cas, si le mouvement du milieu 1 est donné, celui des molécules x', y', z' est déterminé par les équations (5) lesquelles sont de la même forme que les équations de la dynamique à deux degrés de liberté, en ce sens que les dérivées secondes de ξ et de η sont exprimées par des polynomes du second degré par rapport aux dérivées premières [1].

---

[1] Si l'on substituait à l'une des portions du fluide une paroi solide animée du même mouvement, le mouvement des molécules de la partie fluide ne serait pas changé. Il n'en résulte pas, bien entendu, que les équations (5) soient applicables au mouvement superficiel d'un fluide limité par une paroi quelconque. Il n'en est ainsi que dans le cas où le mouvement de cette paroi est celui qu'elle prendrait d'elle-même si on la supposait fluide, de même nature que le milieu qui la touche et soumise aux pressions de ce milieu.

D'autre part, les équations (5) étant toujours résolubles par rapport à ces dérivées secondes (puisque $EG - F^2$ est toujours positif) et admettant la solution $\xi =$ const., $\eta =$ const., il résulte des théorèmes généraux relatifs aux équations différentielles que ξ et η *sont forcément constants si, à un instant déterminé quelconque* t_0 *leurs dérivées sont nulles, c'est-à-dire si, à cet instant, il n'y a point de saut de vitesse.*

Ceci pourra d'ailleurs avoir lieu en tous les points de la surface S — et alors celle-ci ne sera pas une discontinuité absolue; — ou seulement en certains points de cette surface, et alors les molécules de la région 1 situées en ces points coïncideront, dans toute la suite du mouvement, avec les molécules correspondantes de la région 2.

PRINCIPE DE HUYGENS

ET

PROLONGEMENT ANALYTIQUE

(*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 52, 1924.)

I.

Le principe de Huygens a, comme on le sait (¹), reçu plusieurs acceptions dont la diversité a même été la principale cause des obscurités qui ont pendant longtemps régné sur ce sujet.

Huygens, — raisonnant en particulier sur le cas d'un signal lumineux émis sensiblement en un point indiqué O et à un instant unique t_0, — détermine l'effet produit par ce phénomène initial en un point A à un instant ultérieur t' en prenant comme intermé-

(¹) *Voir* notre précédent article *Sur l'intégrale résiduelle* (*Bulletin de la Société*, t. XXVIII, 1900, p. 81). Nous sommes revenu sur ces distinctions, pour les préciser dans une conférence faite à la Société mathématique suisse à Zurich, en 1917. A leur sujet, et pour les différents résultats et formules de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles utilisés ci-après, voir nos *Lectures on Cauchy's problems in linear partial differential equations*, Yale-Cambridge, 1923. (Les renvois à cet ouvrage seront, dans ce qui suit, indiqués par la lettre Y.)

Note du Comité de Rédaction : Les lecteurs français pourront aussi se reporter à la traduction des *Lectures* parue chez Hermann.

diaire l'état de choses qui s'établit à un instant quelconque t_1 pris dans l'intervalle (t_0, t'). Si l'on admet qu'à cet instant t_1, l'effet de la perturbation est localisé sur la surface d'une sphère de centre O et de rayon $\varphi(t_1 - t_0)$, on est conduit, classiquement, à représenter la perturbation en A par une certaine intégrale étendue à la surface de cette sphère; et c'est cela qui, depuis les travaux classiques de M. Volterra, est souvent considéré comme constituant le principe de Huygens.

On sait aujourd'hui que les deux derniers faits que nous venons d'énoncer sont loin d'être évidents et ne peuvent être admis sans un examen très approfondi. Il n'en est pas de même du premier point de départ, lequel s'impose à nous comme une des bases fondamentales de la connaissance. Le principe même du déterminisme scientifique, savoir :

De l'état de l'univers à l'instant t_0, on peut déduire l'état à un instant ultérieur t',

entraîne le complément suivant :

Cette déduction peut s'opérer par l'intermédiaire de n'importe quel instant t_1 tel que $t_0 < t_1 < t'$, l'état en t_0 permettant de calculer l'état en t_1, et celui-ci l'état en t'.

C'est au principe de Huygens ainsi formulé qu'est consacré le présent travail.

Mathématiquement, il se traduit par l'existence de certains *groupes* d'opérations ordinaires ou fonctionnelles.

C'est ce qui a été remarqué, pour la première fois, par M. Picard [1], pour le cas où l'état du système est caractérisé par une seule quantité y définie en fonction du temps par une équation différentielle ordinaire. Si, par exemple, celle-ci est du second ordre et, pour prendre le cas le plus simple, ne contient pas explicitement la variable indépendante t, son intégrale générale sera de la forme

et, en particulier, les valeurs de y et de y' pour $t = t_0 + h$ seront

[1] *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, 1895.

de la forme

$$y_1 = \varphi(h, y_0, y'_0),$$
$$y'_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial h} = \psi(h, y_0, y'_0)$$

Il est clair que les transformations ainsi écrites, celles par lesquelles on passe des valeurs y_0, y'_0 aux valeurs y_1, y'_1, forment un groupe à un paramètre h, et même un groupe dont toutes les substitutions sont échangeables entre elles : le produit des substitutions correspondant aux valeurs h et k du paramètre donne la substitution correspondant à la valeur $h+k$.

M. Le Roux [1] a signalé l'analogue de ce fait dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Soit, par exemple, une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre à une seule inconnue [2] u et à trois variables indépendantes x, y, t. Supposons-la hyperbolique et telle qu'une solution en soit bien déterminée par les données de Cauchy relatives à la multiplicité $t = t_0 =$ const., c'est-à-dire par les conditions

$$u(x, y, t_0) = f(x, y),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_0} = g(x, y).$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$t_1 = t_0 + h, \tag{1}$$

les quantités analogues à f et à g, mais relatives à $t = t_1$,

$$u(x, y, t_1) = f_1(x, y),$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1} = g_1(x, y),$$

seront déterminées lorsqu'on se sera donné les fonctions f c'est-à-dire qu'elles seront de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x, y) = \mathrm{U}\{f, g \mid x, y, t_0, h\}, \\ g_1(x, y) = \mathrm{V}\{f, g \mid x, y, t_0, h\}. \end{array}\right. \tag{2}$$

---

(1) *Journ. de Math.*, 5ᵉ série, t. IX, 1903, p. 403-455; particulièrement n° 22, p. 434.

(2) M. Le Roux (*loc. cit.*) traite le cas général d'un nombre quelconque d'équations à un nombre quelconque d'inconnues.

U et V étant des fonctionnelles [1] de f, g, lesquelles sont aussi fonctions de x, y, t_0, h.

S'il se trouve que les coefficients de l'équation sont indépendants de t, on peut simplifier les équations précédentes en faisant abstraction de l'équation (1) et supprimant, dans les équations (2), la mention de la quantité t_0. La transformation porte alors exclusivement sur les fonctions f et g (à l'exclusion de la quantité t_0).

Laissant de côté ce cas particulier, il est clair que les surfaces $t =$ const. peuvent être remplacées, dans ce qui précède, par n'importe quelle autre catégorie de surfaces, pourvu qu'elles soient propres à la définition d'une solution de l'équation aux dérivées partielles par les données de Cauchy. Tout couple de pareilles surfaces S définit une transformation fonctionnelle T telle que celles que nous venons de considérer et toute famille de surfaces semblables un groupe de transformations T.

Les surfaces S propres à porter des données de Cauchy, de manière à définir une solution de l'équation, sont celles dont le plan tangent coupe un cône caractéristique (ayant pour sommet un point infiniment voisin) suivant une ellipse. Un cas limite est celui de surfaces caractéristiques : dans ce cas, les données de Cauchy peuvent [2] (sans perdre leur caractère de données de Cauchy) être réduites à une seule, — la valeur de l'inconnue u en chaque point. Le passage d'une surface caractéristique à une autre se traduira encore par une transformation fonctionnelle, cas limite de T, que nous désignerons par T_0, et à toute famille de caractéristiques correspondra un groupe de transformations T_0.

Mais, d'autre part, on sait [3] que le problème de Cauchy n'est nullement le seul qui puisse se poser relativement à une équation aux dérivées partielles du type considéré. Les données peuvent être portées par deux portions de surfaces différentes limitées toutes deux à leur intersection, dont l'une S aura, par rapport au cône caractéristique, la situation sus-indiquée, — et portera

(1) Voir nos *Leçons sur le Calcul des Variations* ou les *Leçons d'Analyse fonctionnelle* de M. Paul Lévy.

(2) Cf. Y, n° 113.

(3) Voir *Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles* (*Journ. de Phys.*, 1906, et Y, Livre I, nos 23 et suivants.)

des données de Cauchy, tandis que l'autre Σ ne vérifiera pas la même condition (le plan tangent en un quelconque de ses points coupant un cône caractéristique voisin suivant une hyperbole) : sur cette dernière, les données devront être du genre de Dirichlet, par exemple, les valeurs de l'inconnue en chaque point. C'est ce qui porte le nom de *problème mixte*.

Il est clair qu'un tel problème donne lieu, sous le point de vue qui précède, à deux catégories de transformations, l'une correspondant au changement de la surface S et analogue dans une certaine mesure à T, l'autre correspondant à un changement de Σ et que nous pouvons appeler transformation U.

On obtient encore le problème mixte, sous une autre forme (équivalente à la première, comme il est aisé de s'en convaincre, moyennant la résolution d'un problème de Cauchy), en remplaçant S par une portion de surface caractéristique S_0 (toujours limitée à son intersection avec Σ). Une solution u de l'équation peut alors être considérée comme déterminée par les valeurs qu'elle prend sur S_0 et celles qu'elle prend sur Σ.

Ceci donnera encore lieu à deux sortes de transformations : les unes, correspondant au changement de S_0, ressembleront ainsi aux transformations T_0; les autres correspondront à un changement de Σ et seront encore appelées transformations U.

Le calcul de la solution du problème de Cauchy ou du problème mixte à l'aide des données s'effectue, comme l'on sait, par des intégrales définies faisant intervenir certaines quantités auxiliaires convenables (solution élémentaire, fonction de Riemann, fonction de Green, etc.), le fait que les transformations telles que T, T_0 ou U forment des groupes se traduit par des équations intégrales auxquelles satisfont les quantités en question.

J'ai formé, dans un travail précédent [1], celle qui correspond à l'équation classique de Laplace

$$(e) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$$

et à la transformation T_0, équation intégrale vérifiée par la fonction

[1] *Bulletin de la Société*, t. XXXI, 1903.

de Riemann $\varphi(x, y; x', y')$. Si (x', y'), (x, y) sont deux points du plan; $x = x_1$ une caractéristique de l'un des systèmes passant entre ces deux points, on a

$$(3) \quad \int_{y_1}^{y} v(x, y; x \text{[illegible]} \; v(x_1, \eta; x', y') - \text{[illegible]} \, x_1, \eta) \text{[illegible]} \, \eta; x', y')\Big] d\eta$$

$$= v(x, y; x', y').$$

Il est clair que toutes les autres formes d'équations hyperboliques (et même paraboliques) et toutes les transformations ci-dessus considérées qu'on peut leur appliquer fournissent des relations analogues.

Les équations du type elliptique elles-mêmes permettraient d'en obtenir. Soient C, C′ deux contours dont le second soit intérieur au premier; $G(x, y; \xi, \eta)$, $G'(x, y; \xi, \eta)$ les deux fonctions de Green correspondantes; on aura pour deux points M, N intérieurs à C′,

$$G(M, N) - G'(M, N) = \int_{C'} G(M, P) \frac{d}{dn_P} G'(N, P)\, ds_P,$$

ce qui peut manifestement être considéré comme une transformation U.

Il est clair que des faits analogues se présenteront quel que soit le nombre des variables indépendantes. Nous formerons, un peu plus loin, les relations correspondantes.

De telles relations expriment des propriétés analytiques de quantités telles que la fonction de Riemann. J'ai montré, dans le travail cité, il y a un instant, qu'on obtient effectivement ainsi, dans les deux cas classiques de l'équation des télégraphistes et de l'équation d'Euler et de Poisson, de véritables théorèmes d'addition intégraux pour la fonction de Bessel et pour la fonction hypergéométrique. Le premier de ces théorèmes avait déjà été obtenu directement par M. Caillier, de Genève, qui en avait fait la base d'une nouvelle et très élégante théorie de la fonction de Bessel [1]. A ma demande, le profond géomètre, dont la Science ne saurait trop déplorer la perte prématurée, voulut bien étudier de même le théorème relatif à la série hypergéométrique [2], et obtint, par voie directe, une série

[1] *Bull. Sciences math.*, 2e série, t. 23, 1899, p. 26-48 et *Mémoires de la Société de Physique de Genève*, 1904.

[2] *Bull. Sciences math.*, 2e série, t. 30, p. 20-30 et *L'enseignement mathématique*, t. 21, 1920, p. 255-259.

de formules qui comprennent celle que j'avais écrite comme cas particulier.

Ce sont, semble-t-il, des considérations du même genre appliquées à l'équation de la chaleur, qui ont conduit M. F. Bernstein au remarquable théorème intégral relatif à la fonction thêta dont il a développé les conséquences dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin et les *Proceedings* de l'Académie d'Amsterdam [1].

On sait, d'autre part, que la belle théorie de la composition des noyaux développée par M. Volterra conduit à de tels théorèmes d'addition, et il serait intéressant de rechercher les relations qui existent entre les deux ordres de résultats.

II.

Dans le travail actuel, je me propose d'appliquer ces relations intégrales, non à l'obtention de nouvelles propriétés analytiques des expressions dont il s'agit, mais à la connaissance de leur domaine d'existence, et à leur prolongement analytique.

Considérons d'abord, pour prendre le cas le plus simple, l'équation de Laplace (*e*) et la fonction de Riemann correspondante. Cette dernière est définie autant qu'on le sait (outre l'équation aux dérivées partielles à laquelle elle satisfait) par la connaissance de ses valeurs le long des deux caractéristiques issues du point (x', y'). Dans les *Leçons* classiques de Darboux [2], ceci conduit à la calculer par l'application de la série de Taylor et du calcul des limites, c'est-à-dire dans un domaine forcément plus restreint qu'il ne conviendrait. Même si les coefficients de l'équation (et par conséquent aussi les exponentielles qui font connaître les valeurs de la fonction de Riemann sur les deux caractéristiques précédemment mentionnées) sont dépourvus de toute singularité *réelle*, la différence d'abscisses et la différence d'ordonnées entre les deux points dont dépend cette quantité ne peuvent dépasser, dans ces conditions, une certaine quantité l (en général en relation avec les singularités imaginaires des coefficients).

---

(1) *Sitzungsber.*, Berl., t. XL, 1920, p. 735; *Proceedings*, Amst., t. XXIII, 1921, p. 817.

(2) Tome II, Livre IV, n° 364.

Cette difficulté, il est vrai, n'existe plus aujourd'hui, grâce à la méthode des approximations successives de M. Picard, laquelle permet de résoudre le même problème par des opérations convergentes dans tout rectangle (parallèle aux axes) où les données sont elles-mêmes régulières [1]; mais, dans ce cas simple, il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'elle pouvait être levée [2] par l'emploi de la formule intégrale (3); celle-ci permet évidemment, une fois v définie dans un certain carré de côté l, de la définir dans un carré voisin analogue, et de continuer ainsi dans toute région où les données de la question restent régulières et où, par conséquent, comme l'on sait, l a un minimum différent de zéro.

La question se présente moins simplement lorsque le nombre des variables indépendantes dépasse deux, du moins dans le cas hyperbolique auquel je m'attacherai particulièrement [3]. Il faut alors introduire la *solution élémentaire*, analogue au potentiel élémentaire $\frac{1}{r}$.

En ce qui concerne la formation et l'usage de cette quantité, je renverrai le lecteur à trois Mémoires précédents publiés dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* et dans les *Acta mathematica* [4], ainsi qu'aux *Lectures on Cauchy's problem*. On a d'abord à construire le conoïde caractéristique [5] ayant pour sommet le point arbitraire $a(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ de l'espace à m dimen-

(1) Cette méthode figure dans la deuxième édition du Tome II de Darboux (n° 365), voir aussi le fasc. I des *Cahiers Julia* par M. E. Picard.

(2) La seule autre démonstration proposée dans ce but à notre connaissance est celle de M. Andrae (*Thèse*, Göttingue, 1903, p. 8-10), laquelle ne nous paraît d'ailleurs pas irréprochable.

(3) Le cas elliptique est justiciable des recherches de E. E. Levi (*Circolo di Palermo*) et de Hilbert (*Grundzüge*, 6e Partie).

(4) *Annales sc. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXI, 1904, et t. XXII, 1905 (ces deux Mémoires seront désignés dans ce qui suit par AE_1 et AE_2). *Acta mathematica*, t. XXXI, 1908 (désigné dans ce qui suit par AM). Les notations de AM diffèrent de celles de AE_1 ou AE_2 par l'introduction du facteur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$ dans la solution élémentaire v; celles de Y (et du présent travail) diffèrent des précédentes par le changement de $\mathfrak{V}$ en $-\mathfrak{V}$. D'autre part, en vue de notre objet actuel, nous avons dû changer la notation en ce qui regarde les données de Cauchy.

(5) AE, n° 6; Y, Livre II, Chap. III, n° 58.

sions et même, d'une manière plus précise, le premier membre L de son équation. Si

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathcal{F}(u) \equiv \sum_{i,k} \mathrm{A}_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + 2 \sum_i \mathrm{B}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \mathrm{C} u = f$$

est l'équation aux dérivées partielles (les A_{ik}, les B_i, C et f étant des fonctions données de nos variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$), **A** désignant la forme quadratique « caractéristique »

$$\mathbf{A}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_m; x_1, x_2, \ldots, x_m) \equiv \Sigma \mathrm{A}_{ik} \mathrm{P}_i \mathrm{P}_k$$

et

$$\mathbf{H}(\xi_1, \ldots, \xi_m; x_1, \ldots, x_m) \equiv \Sigma \mathrm{H}_{ik} \xi_i \xi_k,$$

la forme réciproque (forme adjointe de **A**, divisée par le discriminant Δ de **A**), Γ n'est autre que le carré de la distance géodésique entre le point a et le point arbitraire $x\,(x_1, \ldots, x_m)$ comptée relativement à l'élément linéaire

$$\mathbf{H}(dx_1, \ldots, dx_m; x_1, \ldots, x_m).$$

Cette quantité Γ a donc, suivant les puissances des m quantités $(x_i - a_i)$, un développement qui commence par des termes du second ordre (termes qu'on obtient en remplaçant les ξ_i par $(x_i - a_i)$ dans la forme quadratique **H**). Elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Gamma}{\partial x_m}; x_1, \ldots, x_m\right) = 4\Gamma.$$

La quantité Γ étant ainsi formée, deux cas sont à distinguer :

1° Si m est impair, la *solution élémentaire* de pôle a est, parmi les solutions de l'équation aux dérivées partielles, ou plutôt, lorsqu'on la considère comme fonction des x, de l'équation adjointe

$$(\mathcal{E}) \qquad \mathcal{G}(v) = \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_k}(\mathrm{A}_{ik} v) - 2 \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{B}_i v) + \mathrm{C} v = 0,$$

celle qui a la forme

$$(5) \qquad v = \frac{\mathrm{V}}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}},$$

où le numérateur V est régulier au voisinage du point a et y prend la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|_a}}$;

2° Si m est pair, soit $m = 2m_1$, la solution élémentaire n'est plus en général de la forme (5), mais bien de la forme

$$\frac{\quad}{\Gamma^{\frac{m-2}{2}}} - \mathcal{V}\log\Gamma - \overline{\Gamma}$$

les fonctions V et $\mathcal{V}$, dont la première prend encore la valeur $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$ au point a, étant régulières. Cette condition, ici encore, détermine entièrement la fonction $\mathcal{V}$; mais il n'en est pas de même de V auquel on peut ajouter le produit de la fonction (régulière dans ce cas) Γ^{m_1} par n'importe quelle solution régulière de l'équation.

Quelle que soit la parité de m, l'expression ainsi formée satisfait à la *relation d'échange* (1), c'est-à-dire que, par l'échange simultané de l'équation donnée (privée de second membre) avec son adjointe et du point x avec le point a, elle ne change pas (à l'élément arbitraire près qu'elle comporte dans le cas de m pair). Il en résulte que, considérée comme fonction du point a, elle satisfait, si m est impair, à l'équation proposée (E) avec $f = 0$. Si m est pair, cette même propriété (ainsi que celle de vérifier l'équation adjointe lorsqu'on la considère comme fonction des x) appartient à la fonction $\mathcal{V}$, coefficient du logarithme, laquelle peut d'ailleurs être identiquement nulle, comme il arrive dans le cas de l'équation classique des ondes sphériques.

Les solutions élémentaires ainsi définies permettent de calculer la solution du problème de Cauchy, lorsqu'on les introduit dans la formule fondamentale, à savoir celle qui, pour deux solutions *régulières*, l'une u de l'équation (E), l'autre v de l'équation ($\mathcal{E}$),

$$\text{(F)} \qquad -\mathbf{SSS}_T\, v f\, dx_1 \cdots \qquad \mathbf{SS}_S\left(u\frac{dv}{d\nu} - v\frac{du}{d\nu} \quad Luv\right)dS = 0$$

Dans cette formule, $\frac{du}{d\nu}$ et $\frac{dv}{d\nu}$ désignent respectivement les déri-

(1) *Cf.* Darboux, *loc. cit.*, n° 359 de la deuxième édition.

vées de u et v suivant la direction *transversale* à S (direction *conormale* de M. d'Adhémar), direction conjuguée du plan tangent à S par rapport au cône caractéristique représenté par l'équation tangentielle $\mathbf{A} = 0$ ou l'équation ponctuelle $\mathbf{H} = 0$. Plus précisément, la dérivation $\frac{d}{d\nu}$ est définie par les formules

$$\frac{\quad}{d\nu} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i} \qquad (i = 1, \quad \ldots, m),$$

où $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m$ désignent les cosinus directeurs de la normale à S, si dS désigne à la manière ordinaire l'étendue de l'élément d'hypersurface. Mais, comme ce sont seulement les produits $\pi_i\, d$S qui interviennent dans les formules, on peut tout aussi bien prendre pour les π_i des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs en question, à condition de modifier en conséquence la valeur de dS par l'intervention d'un facteur convenable. Par exemple, si $G(x) = 0$ est l'équation de S, on peut prendre $\pi_i = \frac{\partial G}{\partial x_i}$ à condition de remplacer dS par la quantité dS_G ou encore $\frac{dT}{dG}$ (quotient de l'élément de volume dT par dG) dont on obtient la valeur en divisant l'élément d'hypersurface dS par la dérivée normale $\frac{dG}{dn}$ gradient de G.

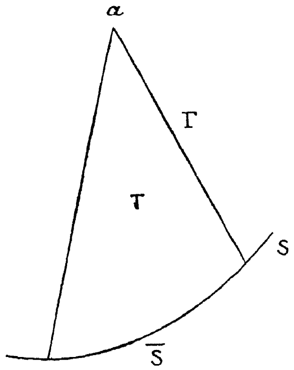
Ces conventions interviennent également dans le calcul de la quantité L, dont l'expression est

Le symbole **SSS** $\left(\text{qui se réduirait à } \int\int\int \text{ si l'on avait } m = 3\right)$ désigne une intégration m-uple dans une portion T d'espace (dans toute laquelle la régularité de u et de v est pour le moment supposée) limitée par une hypersurface S; le symbole **SS** $\left(\text{qui, dans l'espace ordinaire, se réduirait à } \int\int\right)$ représente une intégration $(m-1)$-uple suivant S.

Si maintenant, m étant d'abord supposé impair, $(m = 2m_1 + 1)$ au lieu de supposer la fonction v régulière, on la remplace par la

solution élémentaire (5) de pôle a et que, en même temps, le domaine d'intégration soit limité d'une part par S, d'autre part par le conoïde caractéristique Γ de sommet a (*voir* la figure schématique ci-dessous), la valeur commune des deux membres n'est plus nulle, mais fait, au contraire, connaître celle de u_a, savoir (le coeffi-

Fig. 1.



cient Ω_{m-3} du premier membre représentant l'aire de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $m - 2$ dimensions)

$$(6) \qquad (-$$

$$\mathbf{SS}_{\bar{S}} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{du}{d\nu} \right.$$

$$\mathbf{SSS}_{\Gamma} \, v f \, dx_1, dx_2,$$

$$\mathbf{SS}_{\bar{S}} \left(u \frac{dv}{d\nu} - u' v - L \right.$$

où u et u' représentent les valeurs (supposées données) de u et de sa dérivée transversale $\frac{du}{d\nu}$ en un point arbitraire de S et où l'intégrale **SS** est étendue à la portion S de $\bar{S}$ intérieure au conoïde caractéristique.

Toutes ces intégrales (sauf, si $m = 3$, le premier terme du second membre) doivent, dans la formule précédente, être entendues au

sens que j'ai expliqué dans mes Mémoires précédents (¹). La quantité ρ étant [d'après (5)] infinie le long du conoïde caractéristique, et cela (du moins pour $m \geqq 5$) d'ordre supérieur à 1 (mais toujours fractionnaire) les intégrales en question n'ont, au point de vue classique, aucun sens. Si on limite le domaine d'intégration par l'hypersurface $\Gamma = \varepsilon$, l'intégrale ainsi obtenue augmentera indéfiniment avec $\frac{1}{\varepsilon}$. Mais j'ai montré, aux endroits cités, qu'il convient de lui ajouter une intégrale de frontière convenable, — savoir s'il s'agit de l'intégrale **SSS** qui constitue le premier terme, une intégrale $(m-1)$-uple **SS** étendue à $\Gamma = \varepsilon$; s'il s'agit du second terme **SS**, une intégrale $(m-2)$-uple **S** étendue à l'intersection de $\Gamma = \varepsilon$ avec S — devenant également infinie avec $\frac{1}{\varepsilon}$ dans des conditions telles que le résultat total tend vers une limite parfaitement déterminée lorsque ε tend vers zéro. C'est cette manière d'opérer qui est exprimée par le symbole $\lceil\!\overline{}$.

Les intégrales ainsi généralisées n'ont pas les propriétés habituelles qui s'expriment par des inégalités. Au contraire, on peut généralement leur appliquer toutes les égalités auxquelles satisfont les intégrales ordinaires. Mentionnons en particulier ce que devient pour elles le calcul classique d'une intégrale multiple par quadratures superposées (²), c'est-à-dire par séparation des variables en deux groupes, les unes $x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant d'abord laissées constantes pendant qu'on effectue une première quadrature par rapport aux variables restantes $x_{p+1}, \ldots, x_m$. Ce mode de calcul est légitime, tout comme pour les intégrales ordinaires, tant que la multiplicité $x_1 = \text{const.}$, $x_2 = \text{const.}$, $\ldots$, $x_p = \text{const.}$ coupe toujours la multiplicité (ici le conoïde caractéristique) le long duquel la fonction à intégrer devient singulière, sous un angle fini. Si, au contraire, cet angle est susceptible de tendre vers zéro, il faut (³), au moins dans la partie correspondante du domaine d'intégration, changer de variables de manière à éviter cette circonstance.

(¹) AE_2; AM; Y, Livre III, Chap. I.

(²) Y, Livre III, nᵒˢ 88 et suivants.

(³) Pour un exemple de cette manière d'opérer, voir Y, Livre IV, nᵒˢ 138 et suivants.

Le problème relatif à m impair est ainsi complètement résolu par la formule (6), si l'on sait former la solution élémentaire v.

Lorsque les coefficients sont analytiques, le numérateur V de cette quantité se développe [1] en une série ordonnée suivant les puissances de Γ, laquelle converge tant que les deux points qui y figurent sont suffisamment voisins, ou même (**Y**, n° 180, p. 290) dès que Γ est suffisamment petit.

On peut également [2] obtenir la solution du problème de Cauchy et définir la solution élémentaire par un usage convenable des équations intégrales. Cette dernière méthode est valable dans tout domaine où la géodésique joignant nos deux points et, par conséquent, la distance géodésique de ces deux points peuvent être considérées comme déterminées d'un manière complètement univoque.

Il n'en est pas de même de la première méthode, c'est-à-dire de l'expression de V sous forme de série entière. La restriction apportée à la valeur absolue de Γ est évidemment essentielle, dans le cas général, pour la convergence de cette série.

Par contre, une première expression de V (et, par suite, de v) étant ainsi acquise pour le cas de deux points suffisamment voisins l'un de l'autre, les principes posés dans ce qui précède vont nous permettre d'en effectuer le prolongement dans des domaines pour lesquels cette condition de voisinage n'est plus vérifiée.

Supposons, pour fixer les idées, que la dernière variable x_m soit une variable-temps au sens de la théorie de la Relativité et les $m - 1$ premières des variables d'espace, de sorte que toute ligne $x_1 =$ const., $x_2 =$ const., ..., $x_{m-1} =$ const. soit intérieure au conoïde caractéristique ayant pour sommet l'un quelconque de ses points et que toute surface $x_m =$ const. ait, au contraire, son plan tangent en un point quelconque extérieur au cône caractéristique correspondant et soit coupée, au moins dans la région où l'on opère, par un conoïde caractéristique quelconque suivant une multiplicité fermée [3].

(1) *AE*, nos 9-10; *Y*, Livre II, nos 61 et suivants.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. CLXX, p. 149; *Y*, Livre IV, n° 183 et suivants.

(3) Il est sous-entendu qu'il s'agit d'une équation appartenant au type hyperbolique *normal* (*Y*, Livre I, n° 22), c'est-à-dire telle que la forme caractéristique se compose d'un seul carré positif et de $m - 1$ carrés négatifs, les régions intérieures

Convenons aussi d'employer indifféremment la notation x_m ou la notation t pour désigner la dernière variable. La région de validité du développement de V en série entière par rapport à Γ peut être considérée comme caractérisée par le fait que la différence des t correspondant respectivement aux deux points intéressés soit inférieure en valeur absolue à un certain nombre positif l (cette condition étant suffisante pour en entraîner d'autres analogues relativement aux $m - 1$ autres coordonnées, en vertu de la condition $\Gamma \geqq 0$).

Soit un premier point, que nous désignerons par la notation o et que nous prendrons comme sommet d'un premier conoïde caractéristique Γ_0 (*voir* la figure ci-après). Coupons ce conoïde par une première surface S_1, par exemple une surface $t = \text{const.}$, — délimitant avec lui une portion fermée T d'hyperespace, entièrement intérieure à la région où le développement en série de la solution élémentaire qui a son pôle au point o est convergent, — ce qui arrivera, par exemple, si S_1 est la surface $t = \text{const.} = t_1$, avec $|t_1 - t_0| < l$. La valeur d'une solution régulière quelconque u de l'équation (E) au point o sera exprimée à l'aide des valeurs u_1 et $u'_1 = \dfrac{du}{d\nu}$ de u et de sa dérivée transversale en un point quelconque de S_1 (ou, plus exactement, de la portion $\overline{S}_1$ de S_1 intérieure à Γ_0) par la formule [1]

$$(7) \qquad {}_{m-3}u_0 = -\mathbf{SSS}_{T_1} v_{01} f_1 \, dT_1 + \mathbf{S}_{\overline{S}_1}\left(u_1 \frac{dv_{01}}{d\nu} - u'_1 v_{01} - L_1 u_1 v_{01}\right) \ldots$$

dans laquelle v_{01} est valeur de la solution élémentaire formée avec

à un conoïde caractéristique $\Gamma = 0$ étant, dans ces conditions, celles qui correspondent à $\Gamma > 0$. Les hypothèses géométriques ainsi énoncées ne sont d'ailleurs pas les seules nécessaires à la validité du raisonnement et il y aurait lieu de préciser ces dernières : c'est ce dont je me dispenserai cependant pour le moment, ces hypothèses étant suffisantes pour toutes les équations à coefficients constants et pour toutes les équations qui ne diffèrent pas trop des équations à coefficients constants.

(1) Il nous arrivera, pour simplifier, de surmonter du symbole $\overline{}$ le numéro d'une formule au lieu d'en affecter toutes les intégrales qui y figurent.

les deux points (¹) o, 1 et dT_1 l'élément de volume $dx_1, dx_2, \ldots, dx_m$ décrit par le point 1.

Coupons maintenant le même conoïde Γ_0 par une seconde surface analogue S_2 (*voir* figure ci-après), sur laquelle Γ_0 découpe une portion $\overline{S}_2$ limitée en tous sens, de manière à enfermer un volume limité T_2. Il n'arrivera plus, en général, que les points de $\overline{S}_2$ soient dans la région de validité du développement de v_0, mais il pourra arriver que ceux d'entre eux qui sont intérieurs au conoïde caractéristique ayant pour sommet un point quelconque 1 de S_1 soient toujours dans la région où converge le développement en série de la solution élémentaire ayant pour pôle ce point 1 : pour qu'il en soit ainsi, il nous suffira, par exemple, si S_1 a pour équation $t = t_1$, de supposer que S_2 a pour équation $t =$ const. $= t_2$, avec $|t_2 - t_0| > l$, mais $|t_2 - t_1| < l$.

Si cependant nous imaginions que, par un procédé quelconque, la définition de v_0 soit connue dans tout T_{21}, nous pourrions considérer u comme défini par les données de Cauchy u_2 et $u^2 = \frac{du}{d\nu}$, relatives à S_2, cette définition étant valable au point o; et u_0 serait donné par la formule

$$(8)\qquad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u_0 = -\mathbf{SSS}_{T_2} v_{02} f\, dT + \mathbf{SS}_{\overline{S}_2}\left(u_2 \frac{dv_{02}}{d\nu} - u'_1 v_{02} - L_2 u_2 v_{02}\right) dS_2.$$

Mais, *en tout cas* (que nous puissions ou non parler de v_{02}), moyennant les hypothèses énoncées ci-dessus, la définition de u à l'aide des données relatives à S_2 s'appliquera en tout point de $\overline{S}_1$. Donc pour un tel point, on aura

$$(9)\qquad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u_1 = -\mathbf{SSS}_{\overline{\overline{T}}_2} v_{12} f_2\, dT_2 + \mathbf{SS}_{\overline{\overline{S}}_2}\left(u_2 \frac{dv_{12}}{d\nu_2} - u'_2 v_{12} - L_2 u_2 v_{12}\right) dS_2.$$

(¹) Dans ce qui suit, la quantité v affectée des indices de deux points satisfera à l'équation donnée (E) (privée du second membre) par rapport aux coordonnées du point correspondant au premier indice et à l'équation adjointe ($\mathcal{E}$) par rapport aux coordonnées du second point.

où $\overline{\overline{S}}_2$ est la portion de S_2, $\overline{\overline{T}}_2$ la portion de T_2 intérieure au conoïde de sommet 1 ; et, pareillement, nos intégrales généralisées admettant la différentiation sous le signe intégral, u' sera donné par la formule

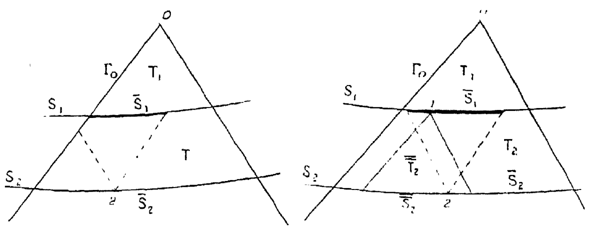
$$\boxed{(9')} \quad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u'_2 = -\mathbf{SSS}_{\overline{\overline{T}}_2}\frac{dv_{12}}{d\nu_1}f_2\,dT_2 + \mathbf{SS}_{\overline{\overline{S}}_2}\left(u_2\frac{d^2v_{12}}{d\nu_1\,d\nu_2} - u'_1\frac{dv_{12}}{d\nu_1} - L_2u_2\frac{dv_{12}}{d\nu_1}\right)dS_2.$$

Reportant ces valeurs dans $\boxed{(7)}$ nous aurons l'expression de u_0 par des intégrales où figureront, outre la valeur f en un point quelconque de T_1 :

1° La valeur de la même fonction en un point quelconque 2 de la région $T_2 - T_1$ comprise à l'intérieur de Γ_0 entre les deux surfaces S_1 et S_2;

2° Les valeurs de u_2 et de u'_2 en un point quelconque de $\overline{S}_2$.

Fig. 2.



Les valeurs de f dans T_1 entreront par l'intégrale m-uple correspondante $-\mathbf{SSS}_{\Gamma_0}$, laquelle ne subira pas de transformation. Quant aux valeurs de f dans $T_2 - T_1$, de u_2 et de u'_2 sur S_2, elles figureront par des intégrales $(2m)$-uple, $(2m-1)$-uple et $(2m-2)$-uple étendues tant à la variation du point 2 qu'à celle du point 1.

D'après $\boxed{(8)}$, v_{02}, s'il existe, n'est autre, au facteur $(-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}$ près, que le coefficient de $-f_2\,dT_2$ ou celui de $u_2\,dS_2$ dans l'expression ainsi obtenue. Les deux résultats concordent et donnent

$$(\mathfrak{T}) \qquad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}v_{02} = \boxed{\mathbf{SS}\left(v_{12}\frac{dv_{01}}{d\nu_1} - v_{01}\frac{dv_{12}}{d\nu_1} - L_1v_{01}v_{12}\right)dS_1.}$$

La sommation est étendue cette fois à tous les points de S_1 dont le conoïde caractéristique contient un point 2 déterminé, c'est-à-dire à tous ceux qui sont intérieurs au conoïde (nappe ascendante, si la nappe de Γ_0 à l'intérieur de laquelle nous opérons est descendante) de sommet 2. Suivant les cas, ce domaine d'intégration comprendra donc toute la trace du conoïde de sommet 2 sur S_1 (comme le montre la figure de droite) ou une partie seulement de cette trace, le conoïde ayant été partiellement arrêté à sa rencontre avec Γ_0 (figure de gauche) (¹).

Inversement si, dans toute la région située au delà de S_1 à l'intérieur de Γ_0, nous définissons la quantité v_0 par la formule ($\mathfrak{T}$), il résulte de tout ce que nous venons de dire que cette définition ne sera jamais en contradiction avec celle de la solution élémentaire supposée connue par ailleurs, et qu'elle en constituera donc légitimement le prolongement analytique.

Il y aurait, il est vrai, des réserves à faire sur le calcul précédent en ce qui regarde tout point de S_2 tel que la trace de son conoïde sur S_1 soit tangente à celle de Γ_0, puisqu'un contact de cette espèce peut mettre en défaut, comme nous l'avons vu, la légitimité du calcul par quadratures superposées et par conséquent celle de l'interversion des intégrations. Autrement dit, si par l'intersection de S_1 et de Γ_0 nous menons une caractéristique (distincte de Γ_0) de notre équation, c'est-à-dire une surface $G(x) = 0$ solution de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\ldots \left(\frac{\partial G}{\ldots}, \frac{\partial G}{\ldots}, \ldots, \frac{\partial G}{\ldots} \right) \ldots$$

notre calcul peut être mis en défaut le long de l'intersection de cette nouvelle caractéristique avec $\overline{S}_2$. Il y aurait évidemment lieu de discuter de plus près ce qui se passe à ce niveau. Je n'entreprendrai cependant pas ici cette discussion, mon but étant simple-

(¹) Précédemment (Y, nº 181) j'avais étudié cette question du prolongement, mais en raisonnant sur la fonction régulière V et non sur v. Les calculs obtenus en se plaçant sous ce point de vue, sont analogues à ceux du texte, mais impliquent la connaissance de V, au delà même de S_1, sur la surface de Γ_0, ce qui ne permettrait pas d'en tirer les conclusions dévelopées ci-après.

ment pour le moment de montrer l'existence du prolongement analytique demandé. A cet égard, les raisonnements précédents suffisent en toute rigueur, si l'on prend soin de prendre pour f_2, u_2, u'_2 des quantités s'annulant dans toute une région (si petite soit-elle d'ailleurs) au voisinage de la caractéristique $G = 0$. Le prolongement analytique pourra d'ailleurs être calculé même dans cette région : il suffira évidemment de modifier en conséquence la surface (arbitraire) S_1.

Un tel prolongement pourra d'ailleurs éventuellement être recommencé un plus ou moins grand nombre de fois, les valeurs calculées sur S_2 permettant de même le calcul sur une surface analogue plus éloignée S_3, et ainsi de suite.

III.

Mais ici se présente une circonstance nouvelle et qui peut, à mon sens, conduire à des conséquences analytiques remarquables.

Le calcul de la solution élémentaire v_0, tout d'abord par développement en série, repose essentiellement sur celui de la distance géodésique $\sqrt{\Gamma}$ entre les deux points considérés. Soit menée, par le point o, une géodésique arbitraire dont la direction initiale dépendra de $m - 1$ paramètres, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$, et soit pris sur cette ligne un point 1 : les coordonnées x_i de ce point seront fonctions de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ et d'un paramètre [1] s déterminant sa position sur la géodésique. On ne pourra prendre le point 1 que dans la région où les équations ainsi écrites seront résolubles par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s$. Il faudra donc, à titre de condition nécessaire sinon suffisante, que le déterminant fonctionnel

$$J = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}, s)}$$

soit différent de zéro (le point o excepté). Non seulement il en est ainsi pour le calcul par série entière, mais également pour la seconde

[1] Par exemple, l'arc o1, au sens ordinaire du mot. On ne peut pas employer l'arc compté à partir de l'élément linéaire H, parce qu'il s'annule identiquement le long de L.

expression que nous avions également obtenue par la solution d'une équation intégrale. L'un et l'autre impliquent en effet la formation de la quantité Γ, et celle-ci cesse d'être bien définie lorsque la condition ci-dessus énoncée n'est plus vérifiée (¹).

Or, dès qu'on abandonne le cas où les formes quadratiques **A** et **H** sont à coefficients constants, il n'y a, comme on le sait, aucune raison pour que cette condition ait lieu constamment et au contraire, le point o admet en général, sur chacune des géodésiques qui en sont issues, un foyer conjugué, lequel est précisément défini par la condition $J = 0$.

Il n'est même plus exact, aujourd'hui, de dire que de tels éléments linéaires à coefficients variables n'ont pas un intérêt physique suffisant pour justifier leur étude approfondie.

Enfin, s'il est vrai que les milieux à indice de réfraction continûment variable ne se prêtent pas assez bien à l'expérimentation pour permettre d'observer les singularités dont il s'agit, il n'en est pas de même des systèmes de rayons réfléchis, pour lesquels ces singularités sont d'expérience courante, et qui relèvent pourtant, comme on va le rappeler dans un instant, de considérations toutes semblables aux précédentes.

Or, pratiquement, les singularités ainsi observées dans la forme des ondes lumineuses ne donnent lieu à aucune difficulté particulière dans l'étude de la propagation (²), au lieu que les problèmes d'Analyse correspondants semblent, comme nous venons de le voir, mettre en défaut nos méthodes de calcul.

Le fait analytique remarquable qui ressort des considérations précédentes est que, en réalité, la solution élémentaire est encore définissable et peut être appliquée à la résolution du problème de Cauchy, là même où le déterminant désigné plus haut par J n'est plus différent de zéro.

Supposons, comme précédemment, que la solution élémentaire v_0 ayant son pôle au point o ait pu être définie dans tout le volume

---

(¹) Le premier terme du développement de V suivant les puissances de Γ devient, d'autre part, imaginaire, lorsque J change de signe [cf. *Y.*, nº 169, formule (72)].

(²) Notons toutefois, sous ce point de vue, les changements brusques de phases au foyer des systèmes optiques étudiés par M. Gouy.

désigné plus haut par T_1 jusques, et y compris, la surface S_1. Traçons encore une seconde hypersurface S_2 extérieure à T_1 et délimitant avec Γ_0 un nouveau volume T_2. Entre S_1 et S_2, les géodésiques issues du point o pourront fort bien présenter des foyers conjugués, et par exemple, le conoïde Γ_0 pourra offrir des points et des lignes singulières; mais nous admettrons, comme plus haut, que S_1 et S_2 sont assez voisines pour que la valeur de v_{12} soit définie relativement à un point quelconque S_1 combiné avec un point quelconque de S_2 (pourvu que chacun de ses points soit intérieur au conoïde issu de l'autre).

Dans ces conditions, la formule ($\mathfrak{T}$) fera connaître la valeur de v_{02} (et cela moyennant une petite déformation de S_1, même aux points situés sur la carctéristique précédemment désignée par $G = 0$) et l'expression ainsi formée de v_0 permet encore la résolution du problème de Cauchy par la formule $\overline{|(8)}$.

La quantité v_{02} ainsi obtenue n'est d'ailleurs différente de zéro que si le conoïde de sommet 2 a une partie commune avec S_1 : cette condition définit une portion $\overline{S}_2$ de S_2.

Soit maintenant S_3 une nouvelle hypersurface située de manière analogue aux précédentes et, plus précisément, de manière à enclore, avec tout conoïde ayant son sommet sur $\overline{S}_2$, un volume limité en tout sens. Si, en outre, nous la supposons assez voisine de S_2 pour que, dans chacun des volumes dont nous venons de parler, la solution élémentaire ayant son pôle au sommet du conoïde correspondant soit définie, la méthode précédente permettra encore de prolonger la définition de la fonction v_0 (si du moins les singularités de v_{02} permettent l'exécution de nos intégrations); et ainsi de suite.

Ainsi se trouve établi ce résultat que l'interprétation physique nous faisait prévoir, mais qui reste si paradoxal au point de vue analytique. Il y aurait lieu, d'ailleurs, à tous points de vue, de le compléter par l'étude de l'allure de la fonction v_0 au voisinage des singularités du conoïde Γ_0.

IV.

L'étude de la réflexion dépend, au point de vue mathématique, de ce que nous avons appelé le problème mixte.

La surface qui porte les données se composera cette fois de deux parties, l'une S, de la même nature que celles qui se sont présentées jusqu'ici, c'est-à-dire obtenues en ne faisant varier que des coordonnées d'espace et telle par conséquent que son plan tangent soit toujours extérieur au cône caractéristique ayant pour sommet le point de contact : surface S qui sera d'ailleurs limitée à une certaine frontière (variété $m-2$ fois étendue) Ω; l'autre Σ, engendrée au contraire par la frontière en question (qui lui est ainsi commune avec S) lorsqu'on y fait varier une coordonnée-temps, de sorte que, contrairement à ce qui arrivait pour S, son plan tangent est toujours sécant au cône caractéristique au point de contact. Nous désignerons par $\mathcal{R}$ la portion d'espace à m dimensions ainsi limitée par S et Σ.

Sur S, on se donnera comme précédemment les données u et u' de Cauchy; sur Σ, la seule valeur de u.

Nous avons donné, au *Congrès international des Mathématiciens* à Strasbourg (¹), une méthode propre à résoudre ce problème mixte. Outre la solution élémentaire v_0 ayant pour pôle un point arbitraire o du domaine $\mathcal{R}$ (*voir* les figures ci-après), il convient d'introduire une autre fonction $\mathbf{v}_0$, également solution de l'équation adjointe dans le domaine τ où elle est définie. Ce domaine s'obtient en coupant Σ par le conoïde caractéristique Γ_0 ou plutôt par sa nappe qui est tournée vers S et que nous appellerons, pour abréger, nappe descendante, puis traçant, par la multiplicité d'intersection $\mathcal{C}$, une seconde caractéristique G (sorte d'onde réfléchie) (²) : il est compris entre Σ et G, ou, d'une manière plus précise, c'est la partie du domaine primitif qui est séparée du point o par G. La fonction $\mathbf{v}_0$, infinie d'ordre $\frac{m-2}{2}$ le long de G, est déterminée par la condition d'être en outre égale à v_0 en tous les points de Σ, de sorte que la somme algébrique

$$(v)_0 = v_0 - \mathbf{v}_0$$

(¹) Pages 499-503 des *Comptes rendus du Congrès*.

(²) Il s'agit, ici encore, d'une onde rétrograde, c'est-à-dire obtenue en remontant le cours du temps et qu'on peut considérer comme déduite d'une onde ordinaire par le principe du retour inverse.

(analogue à la fonction classique de Green) s'annule le long de cette dernière surface. Si maintenant on convient que $(v)_0$, défini comme il vient d'être dit dans τ, doit être pris simplement égal à v_0 dans le reste de la région T (portion de $\mathcal{R}$ intérieure à la nappe descendante de Γ_0), la solution du problème mixte est donnée par la formule

$$(11)\qquad (-1)^{m_1}\pi\Omega_{m-3}u_0 = -\mathbf{SSS}(v)_0 f\, dT + \mathbf{SS}_S\left[u\frac{d(v)_0}{d\nu} - (v)_0\frac{du}{d\nu} - Lu(v)_0\right]dS + \mathbf{SS}_\Sigma u\frac{d(v)_0}{d\nu}d\Sigma,$$

où les intégrales sont étendues respectivement à T et aux portions de S et de Σ comprises à l'intérieur de la nappe descendante de Γ_0.

L'existence de $(v)_0$ résulte de développements donnés ultérieurement [1], du moins (les coefficients étant supposés analytiques ainsi que la multiplicité Σ) en tout point suffisamment rapproché de $\mathcal{C}$. La méthode n'est donc applicable, jusqu'à nouvel ordre, que si toute la région satisfait à cette dernière condition [2], ce qui exigerait que le point zéro ne soit lui-même pas trop éloigné de S [3].

A cette objection, qui restreindrait gravement la portée de notre méthode, il peut être répondu exactement comme nous venons de le faire en ce qui concerne le problème de Cauchy. Le point o et la multiplicité Σ étant donnés, de sorte que la multiplicité peut être construite, soit S_1 une première position de S assez rapprochée [4]

(1) AE_1, nos 1-3; Y, Livre II, no 53.

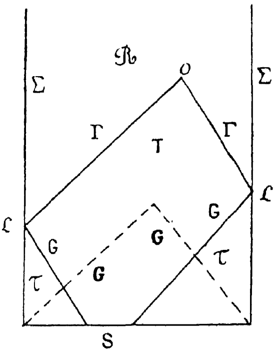
(2) Dans la communication citée plus haut, au Congrès de Strasbourg (*in fine*), j'ai proposé un autre mode de calcul de la quantité **v**, sous forme d'une intégrale analogue à un potentiel de double couche, de manière à échapper à la restriction constatée dans le texte. Je dois toutefois ajouter que l'équation intégrale à laquelle on est ainsi conduit présente des difficultés particulières et nécessiterait une étude spéciale.

(3) Soit G une caractéristique menée par la frontière commune à S et à Σ (onde au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire se propageant vers les temps croissants) et limitée à ses lignes multiples. Le point *o*, s'il est au delà de G, ne devra pas en être trop éloigné.

(4) Il est bien entendu en ce moment que la possibilité pour $\mathcal{C}$ de rencontrer S (ou S_1), — surface à laquelle elle serait alors arrêtée — n'est nullement exclue.

de $\mathcal{L}$ en tous ses points pour permettre l'application de la méthode précédente, c'est-à-dire pour permettre la définition de $(\varphi)_0$. Soit S_2 une autre position de S, plus éloignée du point o que S_1 et dont, par exemple, chaque point se déduira d'un point correspondant de S_1 en diminuant la coordonnée-temps d'une certaine quantité constante ou variable l. Si S_2 est assez voisin de S_1, c'est-à-dire si l admet un maximum suffisamment petit, on pourra définir, en tout point 2 de S_2, la fonction $(\varphi)_1$ analogue à $(\varphi)_1$ obtenue en partant d'un point

Fig. 3.



arbitraire de S_1 (toujours avec la condition que chacun des points 1 et 2 soit intérieur au conoïde ayant l'autre pour sommet). On pourra écrire des relations toutes semblables à (7), (8), (9), (9'), au changement près de toutes les quantités φ en (φ). On pourra donc aussi écrire la formule correspondant à $(\mathfrak{T})$:

$$(\mathfrak{T}') \qquad (-1)^{m_1}\pi\,\Omega_{m-3}(\varphi)_{02}$$

$$\text{SS} \qquad \overline{d\nu_1} \qquad d\nu_1 \qquad - L_1(\varphi)_{01}(\qquad | dS_1$$

laquelle résout le problème.

L'opération pouvant être recommencée un plus ou moins grand nombre de fois, et l ayant, d'après les raisonnements connus, un minimum positif dans toute région où les données sont régulières, on peut progressivement atteindre tout l'intérieur d'une telle région.

Ici encore, rien de tout cela ne suppose la régularité de la surface S

dans toute la région où l'on opère. La quantité (v) sera donc définie et la formule (11) applicable, même si, sur les rayons réfléchis, il y a des foyers conjugués du point o. L'étude de l'intégrale ($\mathfrak{T}'$) permettrait de se rendre compte de l'allure de la fonction au voisinage de singularités de ce genre.

V.

Nous nous sommes jusqu'ici borné au cas de m impair. Les valeurs paires de m donneraient lieu à des calculs sensiblement différents présentant des difficultés nouvelles et, par contre, un intérêt nouveau, ainsi que le montrerait déjà l'étude du cas classique des ondes sphériques.

Nous nous contenterons, dans le travail actuel, d'indiquer les principes à l'aide desquels le calcul doit être abordé, c'est-à-dire ce qui concerne la résolution du problème de Cauchy et du problème mixte.

J'avais précédemment [1] obtenu la résolution du problème de Cauchy pour $m = 2\,m_1$ par ce qu'on peut appeler une « méthode de descente », c'est-à-dire en ramenant l'étude de l'équation (E) à $2\,m_1$ variables à celle d'une équation à une variable de plus

$$\text{(E')} \qquad \mathcal{F}_1(u) \equiv \mathcal{F}(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f,$$

dont l'adjointe est

$$(\mathcal{E}') \qquad \mathcal{G}_1(v) \equiv \mathcal{G}(v) - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_m, c)$ un point arbitraire de l'espace à $m + 1$ dimensions, c désignant la valeur prise en ce point par la coordonnée supplémentaire z. La forme caractéristique relative à la nouvelle équation (E′) étant

$$\mathbf{A}'(P_1, P_2, \ldots, P_m, R) \equiv \mathbf{A}(P_1, P_2, \ldots, P_m)$$

le conoïde caractéristique dans l'espace à $m + 1$ dimensions a pour

[1] *AM*, 5e Partie; *Y*, Livre IV.

équation

où le premier membre Γ' vérifie, bien entendu, l'équation

$$(4') \qquad \mathbf{A}'\left(\frac{\partial\Gamma'}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Gamma'}{\partial x_m}, \frac{\partial\Gamma'}{\partial z}; x_1, \ldots, x_m\right) = 4\Gamma'.$$

A la multiplicité $m - 1$ fois étendue S de l'espace à m dimensions correspondra, dans le nouvel espace, la multiplicité cylindrique S' qui a S pour section droite, c'est-à-dire celle qu'on obtient en associant aux coordonnées x d'un point arbitraire de S, successivement, toutes les valeurs réelles de z. Le problème de Cauchy, posé pour l'équation (E) relativement à la multiplicité S, est entièrement équivalent à celui qu'on peut se poser relativement à l'équation (E') et à la multiplicité S', les données u et u' en un point quelconque de S' étant (quel que soit z) les mêmes qu'au point correspondant de S. En opérant ainsi, nous avons obtenu, dans les travaux cités, la formule

$$(14) \qquad \frac{2(-1)^{m_1}}{(m_1-2)!}\pi^{m_1-1}u_0$$
$$= -\mathbf{SSS}_{\mathrm{T}}\mathfrak{V} f\,dx\,dx_1\ldots dx_m$$
$$+\mathbf{SS}_{\mathrm{S}}\left[u\frac{d\mathfrak{V}}{d\gamma} - (u' + \mathrm{L}u)\mathfrak{V}\right]d\mathrm{S}$$
$$-\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-2}}{d\gamma^{m_1-2}}\left\{-\mathbf{SS}_\gamma \mathrm{V} f\frac{d\Gamma}{d\gamma} + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{d\mathrm{V}}{d\nu} - (u' + \mathrm{L}u)\mathrm{V}\right]\frac{d\mathrm{S}}{d\gamma}\right\}$$
$$-\frac{1}{(m_1-2)!}\frac{d^{m_1-1}}{d\gamma^{m_1-1}}\left(\mathbf{S}_{\sigma_\gamma} u\mathrm{V}\frac{d\Gamma}{d\nu}\frac{d\mathrm{S}}{d\gamma}\right) + \mathrm{S}_{\sigma_\gamma} u\mathfrak{V}\frac{d\Gamma}{d\nu}\frac{d\mathrm{S}}{d\gamma}$$

qui donne la valeur de u au point o et dans laquelle [les éléments Γ, V, $\mathfrak{V}$ de la formule (5') étant pris relativement à ce point] on désigne par γ la portion de surface $\Gamma = \text{const.} = \gamma > 0$ intérieure à la nappe du conoïde qui coupe S et limitée à son intersection avec S, cette intersection elle-même étant désignée par σ_γ.

Passons maintenant au problème mixte.

La solution en ayant été donnée plus haut par la formule (11), pour une équation à $2m_1 + 1$ variables, le problème est, ici encore, virtuellement résolu, pour l'équation à $2m_1$ variables, par la méthode

de descente. La question est de savoir si le calcul ainsi conduit pourra être poussé jusqu'à l'obtention d'une formule analogue à (14).

Pour cela, remarquons d'abord que si l'on introduit, non plus le premier membre de l'équation du conoïde caractéristique, mais une solution quelconque G de l'équation

$$\text{(4 \textit{bis})} \qquad \mathbf{A}\left(\frac{dG}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}, x_1, \ldots, x_m\right) = 4G,$$

la quantité

$$G' = G - (z - c)^2$$

représentera encore une solution de l'équation (4′). Si ces deux fonctions sont telles que, égalées à zéro, elles représentent des surfaces régulières, on pourra, pour l'équation (E′) ou pour son adjointe ($\mathcal{E}'$), former une solution $\mathbf{v}'$ de la forme

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{V}'}{G'^{\frac{m-1}{2}}},$$

et cela en se donnant arbitrairement les valeurs de la fonction régulière $\mathbf{V}'$ le long d'une multiplicité Σ sécante à S′ par exemple, une multiplicité cylindrique (au sens précédemment indiqué) dont la section droite soit sécante à S.

$\mathbf{v}'$ étant ainsi choisi, l'intégrale

$$\text{(15)} \qquad \mathbf{v} = \left| \int_{c = z + \sqrt{G}}^{c_1} \mathbf{v}'\, dc \right.$$

(c_1 constant) donnera [1], pour l'équation correspondant à m variables, une solution de forme analogue à (5′), mais avec remplacement de Γ par G.

Ce sont ces principes que nous avons appliqués, dans les travaux cités, au conoïde caractéristique et à la solution élémentaire. Mais (en tenant compte des remarques précédentes) on peut tout aussi bien les appliquer à une caractéristique quelconque G, par exemple à celle que nous avons ainsi désignée dans la résolution du problème

(1) *AM*, p. 370-371; Y, n° 134.

mixte. Il suffira, pour cela, d'avoir défini le premier membre G de l'équation de cette caractéristique comme étant la solution de l'équation (4 *bis*) (distincte de Γ) qui prend des valeurs égales à celles de Γ en tous les points de la multiplicité Σ : moyennant quoi la fonction

$$G' = G - (z - c)^2$$

fournira une solution de (4′) prenant les mêmes valeurs que Γ′ en chaque point du cylindre droit Σ′ de base Σ. Soient ensuite **v**′ la solution de (ℰ′) qui prend sur Σ′ les mêmes valeurs que la solution élémentaire v' et qui est infinie suivant G′ : l'expression **v** déduite de **v**′ par la formule (15) pourra être considérée comme définie (à une quantité régulière près) par les conditions :

a. D'être solution de l'équation adjointe (ℰ) à m variables;

b. D'être une somme de deux termes, l'un en $G^{\frac{}{2}}$, l'autre en log G, les coefficients étant des fonctions régulières;

c. De prendre, sur Σ, les mêmes valeurs que v, ce qui implique des conditions correspondantes pour chacun des deux coefficients dont il vient d'être question [1].

En désignant encore par (v) la différence v — **V**, cette quantité (v), également solution de l'équation (ℰ), sera encore de la forme (5′) (au remplacement près de Γ par G) le long de G.

Elle sera régulière dans τ, sauf sur la surface de discontinuité G. Les deux coefficients (V) et (𝒱), qui correspondent aux coefficients V et 𝒱 de la formule (5′), et qui sont encore des fonctions régulières aux environs de ℒ, s'annuleront le long de Σ : le second d'entre eux sera d'ailleurs pour son compte une solution de l'équation (ℰ).

Ces principes une fois posés, il est clair que la « descente » de $(v') = v'$ — **v**′ à (v) donnera lieu exactement aux mêmes calculs

[1] Le premier **V** de ces deux coefficients n'est défini qu'à des termes de l'ordre de $G^{2} = G^{m-1}$ près, ses valeurs et celles de ses $m_1 - 2$ premières dérivées aux divers points de G ayant seules à intervenir. Les conditions que cette quantité doit remplir le long de G doivent donc s'entendre seulement à l'ordre $m_1 - 1$ près.

que celle de φ' à φ. La solution du problème mixte sera donc donnée par une formule identique à (14), à ceci près que $\mathfrak{V}$ devra être remplacé par $(\mathfrak{V})$ dans toute la région τ et dans toute la région correspondante de S, pendant que, d'autre part, on devra ajouter des termes en (V) analogues aux termes déjà calculés en V (intégrales **SS** le long de G et intégrales **S** le long de l'intersection de G avec S).

La méthode de descente nous permet donc de résoudre le problème mixte à $2\,m_1$ variables, tout comme elle avait fourni précédemment la solution du problème de Cauchy.

Il n'en reste pas moins qu'une telle méthode, basée sur l'intervention d'une coordonnée supplémentaire complètement étrangère à la question, présente, au moins à première vue, un caractère assez artificiel. Je me suis donc proposé d'établir, sans l'emploi de ce détour, la formule (14) et celle qui lui correspond pour le problème mixte; je vais montrer que c'est, en effet, chose relativement aisée.

Soit $G = 0$ une caractéristique de l'équation, que nous supposerons, pour commencer, régulière : c'est-à-dire que, non seulement le premier membre G de son équation devra être une fonction régulière des coordonnées (fonction admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre qui interviendra dans les raisonnements et les calculs) mais que, en outre, il n'existera dans la région où l'on opère aucun point (point singulier) où ses m dérivées du premier ordre s'annulent simultanément. L'équation caractéristique

$$\mathbf{A}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_m}; x_1, \ldots, x_m\right) = 0$$

devant être vérifiée tout le long de cette surface, on devra avoir identiquement

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 G, \tag{16}$$

$\mathbf{A}_1$ étant une fonction régulière des x. Notons tout de suite qu'il en résulte, pour la dérivée transversale à une surface $G = \text{const.}$ en prenant $\pi_i = \dfrac{\partial G}{\partial x_i}$,

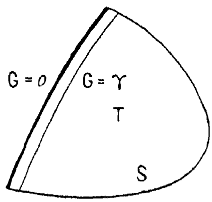
$$\frac{dG}{d\nu} = \frac{1}{2}\sum \pi_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \pi_i} = \mathbf{A}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m) = \mathbf{A}_1 G. \tag{17}$$

Soit, d'autre part,

$$v = \frac{V}{G^p} - \mathfrak{V} \log G,$$

p étant un entier positif pendant que V, $\mathfrak{V}$ sont des fonctions régulières, une solution de l'équation ($\mathcal{E}$), ce qui implique que $\mathfrak{V}$ est lui-même une solution de cette équation. Soient T (figure ci-dessous) le volume compris entre la surface précédente et une seconde surface S et situé, pour fixer les idées, du côté $G \geqq 0$; et T_γ le domaine obtenu en coupant S, non plus par $G = 0$, mais par la surface voisine $G = \text{const.} = \gamma > 0$. Appliquons la formule fonda-

Fig. 4.



mentale (F) à une solution u (régulière) de l'équation (E) et, d'autre part, successivement aux deux solutions v et $\mathfrak{V}$ de l'équation adjointe. L'introduction de $\mathfrak{V}$ donne d'abord, en désignant toujours par u' la dérivée transversale de u en un point arbitraire de S,

$$(18) \qquad -\mathbf{SSS}_{T_\gamma} \mathfrak{V} f \, dT + \mathbf{SS}_S \left[u \frac{d\mathfrak{V}}{d\nu} - (u' + Lu)\mathfrak{V} \right] dS = -\mathbf{SS}_\gamma \left[u \frac{d\mathfrak{V}}{d\nu} - (u' + Lu)\mathfrak{V} \right] dS,$$

formule dans laquelle nous avons rassemblé au premier membre les termes de volume et les termes relatifs à S, en mettant à part, au contraire, dans le second membre, ceux qui sont relatifs à la surface $G = \gamma$. Si nous considérons encore u et u', le long de S, comme des données de la question, ce second membre reste la seule quantité inconnue.

Nous en désignerons la valeur par ϖ.

Pour obtenir une expression de cette inconnue, ou plutôt de sa valeur limite, ϖ_0, pour $\gamma = 0$, écrivons, toujours dans T_γ, la

formule fondamentale, la solution introduite de l'équation adjointe étant, cette fois, φ, et dérivons par rapport à γ (ou, si l'on veut, appliquons la formule dans la portion de T comprise entre deux surfaces voisines $G = \gamma$ et $G = \gamma + d\gamma$, et passons à la limite pour $d\gamma = 0$). Chaque élément de volume donnera, comme coefficient de $d\gamma$, l'élément d'intégrale $(m-1)$-uple désigné précédemment par $\frac{dT}{d\gamma}$; et, de même, chaque élément de la surface S donnera, comme coefficient de $d\gamma$ l'élément $(m-2)$-uple, convenablement compté, de la variété de σ_γ, intersection de S avec $G = \gamma$, élément désigné par $\frac{dS}{d\gamma}\cdot$ On trouve donc, en tenant compte de (16) l'égalité

$$\frac{Q_1}{\gamma^{p+1}} + \frac{Q}{\gamma^p} - \frac{\varkappa_1}{\gamma} - \varkappa \log\gamma = \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{P}{\gamma^p} - \varpi_1 - \varpi \log\gamma\right),$$

où, en même temps que la quantité ϖ déjà introduite, figurent les expressions

$$Q_1 = -p\,\mathbf{S}_{\sigma_\gamma} u V \frac{dG}{d\nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$Q = -\mathbf{SS}_\gamma V f \frac{dT}{d\gamma} + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{dV}{d\nu} - (u' + Lu)V\right]\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\varkappa_1 = \mathbf{S}_{\sigma_\gamma} u \mathfrak{V} \frac{dG}{d\nu}\frac{dS}{d\gamma},$$

$$\varkappa = -\mathbf{SS}_\gamma \mathfrak{V} f \frac{dT}{d\gamma} + \mathbf{S}_{\sigma_\gamma}\left[u\frac{d\mathfrak{V}}{d\nu} - (u' + Lu)\mathfrak{V}\right]\frac{dS}{d\gamma}$$

(ν désignant la transversale à S), et

$$P = \mathbf{SS}_\gamma\left|u\frac{dV}{d\nu} - (u' + Lu)V - p\,\mathbf{A}_1 u V\right|\frac{dT}{d\gamma}, \qquad \varpi_1 = \mathbf{SS}_\gamma \mathbf{A}_1 u \mathfrak{V}$$

ν désignant la transversale à $G = \gamma$, calculée en prenant $\pi_i = \frac{dG}{dx_i}$).

On voit d'abord, comme il fallait s'y attendre, que les coefficients de $\log\gamma$ sont égaux de part et d'autre [c'est la relation obtenue en dérivant, par rapport à γ, les deux membres de (18)]. Mais de plus, comme dans les conditions où nous nous plaçons jusqu'ici, les fonctions P, ϖ_1, ϖ sont développables suivant les puissances de γ (au moins jusqu'à l'ordre qui nous intéressera), on voit aussi

que ϖ_0 *est le coefficient de l'unique terme en* $\frac{1}{\gamma}$ *qui existe au second membre.*

Donc on a

$$(20) \qquad \varpi_0 = -\frac{1}{p!}\left(\frac{d^p Q_1}{d\gamma^p}\right)_{\gamma=0} - \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^{p-1} Q}{d\gamma^{p-1}}\right)_{\gamma=0} + \varkappa_1 \gamma = 0.$$

Telle est, à la limite (c'est-à-dire pour $\gamma = 0$), la valeur du second membre de (18). L'élimination de ϖ_0 entre (18) et (20) fournit une relation entre les valeurs de u et de u' sur S (confirmant, comme on le sait déjà par ailleurs, que, dans la disposition de figure actuelle, ces valeurs ne peuvent pas être données arbitrairement).

Prenons, maintenant, pour $G = 0$, non plus une caractéristique régulière, mais un conoïde caractéristique, de sorte que G n'est autre que Γ et que, par conséquent, la quantité précédemment désignée par **A** a la valeur constante 4 pendant que p a la valeur $\frac{m-2}{2}$. Les considérations précédentes vont se trouver modifiées par la singularité qui apparaît au sommet du conoïde. Ceci ne change rien à l'évaluation du premier membre de (19), mais, au second membre, le terme de coefficient ϖ n'est plus le seul qui fournisse un terme en $\frac{1}{\gamma}$ (c'est-à-dire qui, avant dérivation, soit en $\log \gamma$).

Pour le voir, on peut, soit abstraire du domaine d'intégration le voisinage du sommet du conoïde en coupant par une petite surface auxiliaire S_1 et évaluer (asymptotiquement) les termes correspondants ainsi ajoutés au premier membre de (19), soit laisser la surface $\Gamma = \gamma$ complète et étudier directement le changement à apporter au second membre. Nous adopterons cette seconde manière d'opérer.

Les choses apparaissent d'ailleurs sous un jour assez notablement différent suivant que m est égal à 2 ou supérieur à 2.

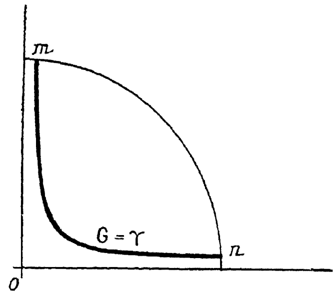
1° Prenons d'abord $m = 2$, c'est-à-dire le cas classique de Riemann. L'équation étant comme d'habitude réduite à la forme de Laplace (e), le conoïde se réduit à un angle droit, dont nous prendrons le sommet pour origine des coordonnées et les lignes $\Gamma = 4xy =$ const. seront des hyperboles équilatères. Comme on a ici (ainsi qu'il est bien

connu dans l'étude de la méthode de Riemann) (¹),

$$\pm \frac{d}{d\nu}\, ds = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx - \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)$$

et que p est nul, on voit que le terme en P ne donne lieu qu'à des

Fig. 5.



termes finis et à dérivée finie [2] pour $\gamma = 0$. Par contre, sur l'hyperbole $\Gamma = \gamma$, on a

$$\frac{d\Gamma}{\ } = + \frac{\cos(n, x)\, ds}{\ } + \frac{\cos(n, y)\, ds}{\ } = \qquad \frac{dy}{y}$$

et ϖ_1 représente, au signe près, l'intégrale curviligne

$$u\mathfrak{V}\frac{\ }{x}$$

étendue à l'arc mn intercepté sur l'hyperbole par la multiplicité — ici la ligne — S.

On voit immédiatement qu'on peut réduire $u\mathfrak{V}$ à sa valeur à l'origine : en effet, en raison de la double forme (21) de l'élément $\frac{d\Gamma}{d\gamma}$, tout terme contenant en facteur soit x, soit y donnera un résultat

(¹) Sur le signe à prendre dans ces formules (et qui dépend de l'orientation de la ligne S par rapport aux axes coordonnés), voir Y, Livre II, n° 42.

(²) *Voir* la note suivante.

fini et régulier [1]. Cette quantité, qui se réduit à u_0 si l'on prend égale à l'unité la valeur initiale de ϑ, sera multipliée par

$$\log\frac{x_1}{x_2} = \log\gamma$$

en désignant par x_1, y_1 ; x_2, y_2 les coordonnées des points m, n.

La différence des deux valeurs (18) et (2) de ϖ_0 n'est donc plus nulle, mais égale à u_0, dont elle fait connaître la valeur, de sorte qu'on retrouve ainsi [2] la formule classique.

2° Soit maintenant m supérieur à 2. Nous emploierons, comme nous l'avions déjà fait précisément (Y, n° 141) [3], le changement de variables (introduction des « variables normales » de Lipschitz) qui réduit **A** à une forme quadratique à coefficients constants, et par conséquent (moyennant une substitution linéaire) à la forme

$$\Gamma = \xi_m^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \ldots - \xi_{m-1}^2$$

(ξ_1, ξ_2, ..., ξ_m étant les nouvelles variables), ce que nous écrirons encore plus brièvement

$$\Gamma = t^2 - r^2,$$

en désignant par t la dernière variable ξ_m et par r^2 la somme des carrés des variables restantes. Cette forme donnée à Γ implique

---

(1) Ce sera une intégrale curviligne où, sous le signe $\int$, le coefficient de dx ou dy sera borné ainsi que ses dérivées. La dérivée d'une telle intégrale s'obtient immédiatement par transformation en une intégrale double, et l'on voit ainsi qu'elle est dans un rapport fini avec la dérivée de l'aire interceptée dans notre hyperbole par une ligne fixe.

(2) L'étude du premier membre de (19) présente, elle aussi, quelques différences avec le cas de $m > 2$: voir Y, n° 150.

(3) Cette manière d'opérer — comme d'ailleurs le raisonnement fait à l'endroit cité dans le texte — n'est, strictement parlant, légitime que si l'on connaît l'effet du changement de variables sur tous les calculs exécutés. Il y aurait eu lieu, à cet effet, d'écrire ces calculs sous forme entièrement invariante, ce qui aurait été obtenu si l'on avait pris comme élément de volume de l'espace non la quantité $dx_1\,dx_2\ldots dx_m$, mais bien son produit par $\frac{1}{\sqrt{|\Delta|}}$, ainsi qu'il est bien connu dans les recherches actuelles de géométrie généralisée. Les modifications à faire subir aux formules, et sur lesquelles je compte revenir à l'occasion, seraient aisées à indiquer (cf. Y, p. 91, note, et p. 582, note).

que, à l'origine des coordonnées, la quantité $\mathbf{A}(P_1, P_2,$
se réduit à

(22) $$., P_m; 0, 0, \ldots, 0) = P_m^2.$$

et par conséquent, au voisinage de l'origine, à une forme quadratique très peu différente de celle-là.

Les nouvelles variables indépendantes $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ peuvent elles-mêmes s'exprimer en fonctions de r et de $m-2$ paramètres angulaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$: l'élément de volume sera donc

$d\Omega_{m-2}$ étant l'élément de surface d'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à $(m-1)$ dimensions] et l'on en déduit aisément (Y, *loc. cit.*) que l'élément désigné plus haut par $\frac{dT}{d\gamma}$ a l'expression

dans laquelle il convient ici de noter que, dans le cas actuel, l'exposant de r est positif et même au moins égal à 1.

Dans ces conditions, en opérant comme plus haut ou comme nous allons le faire dans un instant, il est aisé de voir que le terme ϖ_1 ne fournit dans la dérivation aucun terme infini avec $\frac{1}{\gamma}$. Par contre, il en est autrement du terme en P. Dans ce dernier, la quantité qui figure entre crochets sous le signe **SS** est une fonction régulière; sa valeur à l'origine est d'ailleurs uniquement donnée par son dernier terme $-p\,\mathbf{A}_1 u V$, car dans tous les autres interviennent les dérivées $\pi_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i}$ lesquelles sont nulles au sommet de notre conoïde. Si donc nous commençons par multiplier par $d\Omega_{m-2}$ et intégrer par rapport à $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$, le résultat sera une certaine fonction $\Phi(r, t)$ régulière (et paire par rapport à r) qui prend, pour $r = t = 0$, la valeur

après quoi on aura

(24) $$P = \frac{1}{2}\int r^{m-}$$

l'intégrale étant prise, dans le plan des rt, le long d'un arc de l'hyperbole $t^2 - r^2 = \gamma$, que l'on peut supposer limité par la ligne $t = h$. Si, sous le signe $\int$, on réduit Φ à son terme initial (23), celui-ci sera multiplié par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int r^{m-3}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\gamma}}^{h} (t^2 - \gamma)^{\frac{m-3}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\gamma}}^{h} (t^2 - \gamma)^{\frac{\quad}{2}}\,dt.$$

Or cette dernière est (cf. Y, p. 151) de la forme

(C_{m_1-1} étant le coefficient numérique désigné plus haut), dans laquelle $P(\gamma)$ est une série entière en γ. Comme on doit diviser par γ^{m_1-1}, ceci donne un terme de la forme qui nous intéresse et dont le coefficient est la quantité (23).

Il est aisé de voir que ce terme est seul de son espèce dans le cas où les données sont analytiques et où, par conséquent, $\Phi(r, t)$ est de la forme

$$\Phi(r, t) = \Phi_1(r, t^2) + t\,\Phi_2(r, t^2),$$

Φ_1 et Φ_2 désignant des séries entières en r et t^2 : il suffit de traiter d'une manière analogue à la précédente chaque terme des développements ainsi obtenus.

Si l'on veut supposer seulement que les quantités sur lesquelles on opère sont régulières, c'est-à-dire dérivables jusqu'à un ordre suffisamment élevé, on raisonnera comme à l'endroit précédemment cité (Y, n° 141), en formant les dérivées successives de l'intégrale (24) jusqu'à l'ordre $m_1 - 1$. Il apparaîtra ainsi, par l'emploi de la formule de Taylor, que la quantité

$$\frac{d}{d\gamma} \qquad \cdots \qquad {}_{1-1}\, d\gamma$$

se présente sous la forme de termes en $\frac{1}{\gamma^{m_1}}, \frac{1}{\gamma^{m_1-1}}, \cdots, \frac{1}{\gamma}$ à coefficients constants et de termes finis augmentée d'un terme en $\log\gamma$ dont le

coefficient a pour limite (23) au coefficient numérique $\frac{(-1)^{m_1}}{4} C_{2m_1-1}$ près. D'une manière ou de l'autre, on retombe bien sur la formule (14) : et l'on obtiendrait évidemment de même la formule qui résout le problème mixte.

Je renvoie à un travail ultérieur l'examen des conséquences de cette formule au point de vue développé plus haut et je me contenterai, en terminant, de noter la notable différence qui, dans le calcul précédent, paraît séparer les cas de $m = 2$ et de $m \geqq 4$. Il serait impossible de concevoir que les deux calculs correspondants se ramènent en réalité à une même norme, si l'on ne connaissait les liens qui rattachent l'une à l'autre les fonctions V et $\mathfrak{V}$, tels qu'ils apparaissent lorsqu'on déduit le cas de $m = 2m_1$ de celui de $m = 2m_1 + 1$ par voie de « descente ». La méthode de descente, dont nous nous étions servis précédemment, se montre donc, en fin de compte, beaucoup moins artificielle qu'elle ne le semblait au premier abord et nous apparaît comme liée à la nature des choses.

En terminant, je reviendrai un instant sur le caractère paradoxal que présente la formule ($\mathfrak{T}$) par laquelle nous avons, dans le cas de m impair, exprimé la quantité φ_{02} : il apparaît, en effet, que cette quantité — laquelle est, si les coefficients sont analytiques et les points 0, 2 suffisamment rapprochés, une fonction analytique des coordonnées du point 2 — est représentée par une intégrale dans laquelle le domaine d'intégration peut avoir plusieurs formes différentes suivant la situation respective des points 0, 2 et de la variété S_1.

Prenons le cas le plus simple, celui de l'équation des ondes cylindriques

$$\partial^2 u \qquad \partial^2 u \qquad \partial^2 u$$

la surface S_1 étant un plan $t =$ const. Le nombre m est alors égal à 3 et la solution élémentaire est

On devra alors considérer les deux conoïdes (c'est-à-dire, ici,

les deux cônes) caractéristiques de sommets respectifs o et 2, lesquels couperont le plan S_1 suivant deux cercles C_0, C_2 de centre P (x_0, y_0), Q (x_2, y_2) et de rayons $h = |t_0 - t_1|$, $k = |t_1 - t_2|$. L étant nul, v_{02} sera donné par l'intégrale double

(22) $$v_{02} = \pm \text{[illegible]}$$

Cette intégrale devra être étendue au domaine D formé des points intérieurs à la fois à C_1 et à C_2. Mais ce domaine n'aura pas toujours la même forme, puisque les cercles C_1 et C_2 seront tantôt intérieurs l'un à l'autre — ce qui représente déjà deux cas possibles — ou sécants.

Malgré cela, l'intégrale correspondante a toujours la valeur v_{02}.

Pourrait-on constater autrement que cette intégrale donne toujours la même fonction analytique de x_0, y_0, x_2, y_2, h, k ?

C'est ce qu'on pourrait aisément établir par une méthode analogue à celle que j'ai indiquée précédemment (Y, n° 94, p. 149) en ce qui concerne une intégrale double analogue, à savoir celle qui serait étendue à la région D, formée des points intérieurs à l'un des cercles et extérieurs à l'autre : il suffirait de considérer x_1, par exemple, comme une quantité complexe $x_1 + ix'_1$, dont la partie imaginaire x'_1 serait prise comme troisième coordonnée, et d'intégrer, dans l'espace ainsi constitué, le long d'un ellipsoïde de révolution infiniment aplati qui ait pour équateur un cercle Γ comprenant C_1 et C_2 à son intérieur.

Pour transporter cette argumentation au cas qui nous intéresse, il faudrait prendre le cercle Γ constamment intérieur à la région D et, pour cela, dans le cas de deux cercles sécants, le faire passer par les points d'intersection. Il n'est nullement évident que l'intégrale ainsi calculée doit rester une fonction analytique unique soit que les cercles C_1, C_2 soient sécants, soit qu'ils soient intérieurs l'un à l'autre, et une étude spéciale serait nécessaire à cet égard.

Quant au calcul direct de l'intégrale, il ne faudrait pas croire qu'il soit exempt de difficulté. Les systèmes de variables auxquels on est le plus naturellement tenté de songer conduisent tous à faire intervenir des intégrales elliptiques.

L'intégrale (22) est liée à l'intégrale

$$(23) \qquad \mathrm{I} = \int\int_{\mathrm{D}} \varphi_{01}\varphi_{12}\, dx_1\, dy_1$$

$$= \int\int_{\mathrm{D}} \frac{\quad}{\sqrt{h^2 -}} \qquad \times \frac{\quad}{\sqrt{k^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1}}$$

par la relation

$$(24) \qquad \partial \mathrm{I} \qquad \partial \mathrm{I}$$

et, φ_{02} étant connu, ceci peut être considéré comme une équation aux dérivées partielles qui déterminera I si l'on y joint la condition que I s'annule, d'une part, lorsque l'un des cercles se réduit à un point et, de l'autre, lorsqu'ils sont tangents extérieurement. On voit ainsi que I a une expression différente suivant que les cercles sont intérieurs ou sécants. Ce n'est que pour la combinaison (24) qu'il en est autrement.

Ici encore, de même que dans les cas précédemment cités de l'équation des télégraphistes ou de l'équation d'Euler-Poisson, notre principe conduit à des identités qui resteraient assez cachées sans son usage.

REMARQUES GÉOMÉTRIQUES

SUR LES ENVELOPPES

ET

LA PROPAGATION DES ONDES

(*Acta mathematica*, t. 54, 1930.)

Les considérations qui vont suivre se rattachent indirectement à l'œuvre de Fredholm par l'intermédiaire de nos recherches antérieures sur les équations aux dérivées partielles, telles qu'elles ont été exposées notamment dans ce Journal (1), les *Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure*, le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (2), les *Atti. Soc. It. per il Progresso delle Scienze* (3), et récemment dans le *Journal de Mathématiques* (4).

C'est, on le sait, à Fredholm (5) que l'on doit l'une des premières et des plus fécondes impulsions dans la recherche des solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles, c'est-

(1) T. XLIX, p. 203-244 (Mémoires publiés en l'honneur de G. Mittag-Leffler).

(2) *Ann. Sc. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXI, 1904, p. 535-566; t. XXII, 1905, 1905, p. 131-141; *Bull. Soc. Math. franç.*, t. LII, 1924, p. 141-178. Voir aussi nos *Lectures on Cauchy's problem*, London-New Haven, 1923 (une traduction française est sous presse).

(3) *XIIIe Congrès*, Naples, 1924.

(4) T. VIII, 1929, p. 197 (Mémoires publiés en l'honneur de MM. Picard et Appell).

(5) *Acta*, t. XXIII, 1900, p. 1-42. Ces recherches fondamentales de Fredholm ont été reprises dans d'importants travaux récents tels que ceux de MM. Leroux, Zeilon, Herglotz.

à-dire dans la généralisation à ces équations du potentiel élémentaire classique $\frac{1}{r}$. Son analyse s'applique à toute équation linéaire à trois variables indépendantes et à coefficients constants, quel que soit son ordre, pourvu que tous les termes en soient du même ordre, et aussi aux systèmes d'équations à coefficients constants qui interviennent dans l'étude de l'Élasticité en milieu homogène anisotrope. L'équation du second ordre à coefficients analytiques quelconques a été traitée pour le cas de deux variables indépendantes, grâce aux travaux de MM. Picard, Hilbert et Hedrick, Sommerfeld (1), puis, pour une première forme, d'équations à trois variables, par M. Holmgren (2). Nous avons réussi (3) à former la solution élémentaire pour l'équation la plus générale du second ordre à coefficients analytiques, ou même non analytiques (4), de manière à permettre l'intégration de toute équation de cette forme.

Par le fait même du rôle qu'elle joue dans ce dernier problème, la solution élémentaire intervient nécessairement dans toutes les études que le géomètre peut entreprendre sur le célèbre principe de Huygens. Sous sa forme la plus simple (celle que nous avons appelée précédemment forme A ou « majeure » de Huygens), ce principe se traduit par une sorte de théorème d'addition auquel elle satisfait; mais la formule d'addition dont il s'agit a la forme d'une équation intégrale, se rattachant ainsi à la grande idée introduite dans la science par Fredholm. Nous nous sommes proposé, dans les travaux cités plus haut, d'écrire cette formule pour les premières valeurs du nombre m des variables indépendantes et, dans le dernier d'entre eux, nous avons porté notre attention sur le cas de $m = 3$. On a alors l'avantage de pouvoir serrer de près sans difficulté, les figures étant construites dans l'espace ordinaire, le côté géométrique de la question.

(1) Picard, *C. R. Acad. Sc.*, 6 août 1891 et 5 juin 1900; Hilbert, *Leçons de Göttingue*, 1901 (non publié); Hedrick, *Thèse*, Göttingue, 1906; Sommerfeld, *Encycl. der Math. Wiss*, II A 7 c, 1900.

(2) *Arkiv för Mat., Astr. och Phys.*, t. I.

(3) *Loc. cit.*, p. 247, note 2.

(4) *C. R. Acad. Sc.*, t. CLXX, 1920, p. 149. Voir aussi l'ouvrage cité et E. E. Levi, *Circolo Mat. di Palermo*, t. XXIV, 1907, p. 275.

C'est uniquement à cette étude géométrique que nous consacrons le présent travail. Nous y abordons, sous ce seul point de vue d'ailleurs, l'étude des ondes à caustiques, dont la nature nous offre de continuels exemples, sans que leur influence sur nos calculs d'intégration ait pu être formulée jusqu'ici [1]. L'étude géométrique que nous entreprenons en ce moment est, à cet égard, un préliminaire indispensable.

Étant donné l'objet spécial ainsi visé, nous nous sommes bornés aux singularités de type courant, introduisant toutes les hypothèses qui peuvent nous être utiles, pourvu qu'elles soient réalisées dans les exemples concrets que nous offre (au nombre des dimensions près, puisque nous allons raisonner sur des phénomènes plans) la propagation de la lumière. Il y aurait assurément place pour une étude plus précise de ces hypothèses et, par conséquent, du degré de généralité de nos résultats.

Ajoutons que la plus grande partie de celle-ci a été résumée dans une récente communication adressée au Congrès des Mathématiciens slaves (réunion de Varsovie, septembre 1929).

1. Nous partons d'une famille de surfaces à deux paramètres

$$z = F(x, y, \alpha, \beta) \tag{1}$$

qui peut être considérée comme intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre (C). Cette dernière elle-même, dans les applications qui nous intéresseront, sera du second degré et proviendra d'une équation linéaire du second ordre (E) dont elle définira les caractéristiques. Nous adopterons d'ailleurs toujours la terminologie correspondant à cette dernière hypothèse, c'est-à-dire que nous appellerons « caractéristiques » les solutions de l'équation (C) et « bicaractéristiques », les caractéristiques de (C).

Nous portons tout d'abord notre attention sur une caractéristique particulière Γ_0 ainsi que sur une certaine bicaractéristique λ appartenant à Γ_0. L'intégrale complète (1) sera supposée dépourvue de

[1] Rappelons cependant les résultats bien connus de Gouy (*Annales de Chimie et Physique*, 6e série, t. 24, p. 145). *Voir*, à leur sujet, Julius, *Arch. Néerl.*, t. 28; Zeeman, *Ibid.*, 2e série, t. 5, 1901; Sagnac, Boltzmann, *Festschr.*, 1904.

singularités. Mais il n'en sera pas de même de la surface Γ_0, qui s'en déduit par la construction connue de Lagrange, c'est-à-dire comme une enveloppe, et ce sont précisément les singularités de Γ_0 qui vont nous intéresser. On ne diminuera d'ailleurs pas la généralité en admettant que la relation entre α et β qui, d'après la méthode de Lagrange, engendre Γ_0 n'est autre que $\beta = 0$, et que la bicaractéristique λ correspond à $\alpha = 0$, de sorte que les équations

$$z = F(x, y, \alpha, 0), \tag{2}$$

$$\frac{\partial F(x, y, \alpha, 0)}{\partial \alpha} = 0 \tag{2'}$$

définissent la bicaractéristique λ lorsqu'on y fait $\alpha = 0$ et la surface Γ_0 lorsqu'on élimine α entre elles.

D'un point quelconque [1] (x_2, y_2, z_2) pris sur λ, comme sommet, construisons le conoïde caractéristique, c'est-à-dire la solution de (C) obtenue en liant α et β par la relation

$$z_2 - F(x_2, y_2, \alpha, \beta) = 0. \tag{3}$$

Ainsi qu'il est bien connu, ce conoïde Γ_2 se raccorde à Γ_0 tout le long de la bicaractéristique. Ceci correspond, en somme, au fait que, (2) et (2') étant vérifiées pour $\alpha = 0$, $x = x_2$, $y = y_2$, $z = z_2$, pendant que $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ est différent de zéro [2], la relation (3) donne $\frac{d\beta}{d\alpha} = 0$ pour $\alpha = 0$, de sorte que l'équation

$$\partial\alpha \qquad \frac{d\beta}{d\alpha}\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0,$$

qu'il faut lui adjoindre pour définir le conoïde Γ_2, est vérifiée en même temps que (2') en chaque point de λ.

Nous couperons les deux surfaces Γ_0 et Γ_2 par une même surface arbitraire S_1, sorte d'écran [3] sur lequel elles seront représentées par leurs traces. L'équation (C) étant supposée du second degré, ou,

(1) Notation adoptée dans un but de concordance entre le Mémoire actuel et les précédents.

(2) S'il en était autrement, on serait en présence d'une intégrale singulière de l'équation (C), hypothèse que nous excluons.

( ) C'est le rôle qu'elle jouerait dans l'interprétation optique des considérations actuelles.

plus généralement, le cône (enveloppe de plans) qu'elle définit en chaque point étant supposé convexe, S_1 sera supposé être une « surface d'espace », c'est-à-dire que son plan tangent en chaque point sera extérieur au cône défini par l'équation au même point : il en résulte qu'un plan parallèle à celui-là coupera suivant une courbe fermée le cône analogue ayant pour sommet un point infiniment voisin quelconque. Dès lors, pour des raisons de continuité, il en sera de même lorsqu'on remplacera le plan tangent par la surface S_1 elle-même et le cône par le conoïde caractéristique de même sommet. Nous admettrons non seulement qu'il en est ainsi, mais qu'il continuera à en être de même lorsque le sommet du conoïde occupera sur la bicaractéristique λ les diverses positions que nous serons conduits à envisager pour lui : ceci est évidemment une condition que nous pouvons imposer à notre écran S_1.

Γ_0 se raccorde, tout le long de λ, avec l'intégrale complète G qui est représentée par l'équation (1) lorsqu'on fait, dans cette dernière, $\alpha = \beta = 0$. Nous pouvons d'ailleurs admettre que G est le plan des xy; la ligne bicaractéristique λ, l'axe des x et l'écran S_1, un plan $x = x_1$ parallèle au plan des yz.

2. Le point 2 — c'est-à-dire le point (x_2, y_2, z_2) — étant d'abord placé au point o d'intersection de λ avec l'écran, déplaçons-le progressivement sur λ dans un sens déterminé que nous considérons comme positif. La courbe fermée γ_2, trace du conoïde correspondant, d'abord infiniment petite, se déformera progressivement tout en restant tangente, à l'origine, à la trace γ_0 de la surface Γ_0. Proposons-nous d'étudier l'influence que le déplacement du sommet 2 exerce sur les relations mutuelles des deux courbes.

Plus spécialement, notre caractéristique Γ_0, enveloppe de la famille de surfaces (2), pourra admettre une arête de rebroussement Λ, même si, comme nous le supposerons, chacune des surfaces (2) et, d'une manière générale, l'intégrale complète (1) est dépourvue de singularités. Cette arête ou, comme nous l'appellerons encore, cette *caustique*, est tangente, comme on le sait, à une série de bicaractéristiques successives. Nous allons voir que si elle l'est à λ, et si le point 2 vient coïncider avec le point de contact, *les deux courbes* γ_0, γ_2 *auront entre elles, à ce moment-là, un contact de second ordre.*

Le point de contact de λ avec la caustique s'obtient en adjoignant à (2), (2′) la troisième équation

$$(2'') \qquad \frac{\quad}{\partial\alpha^2} = 0.$$

D'autre part, sur la surface du conoïde, c'est-à-dire en considérant α et β comme liés par la relation (3), la valeur de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ est donnée par β' et celle de $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ par la condition (où x, y, z sont encore remplacés par x_2, y_2, z_2)

$$\frac{\quad}{\partial\alpha} \qquad \frac{\partial F}{\partial\beta}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = 0.$$

Écartons toujours l'hypothèse où $\frac{\partial F}{\partial\beta}$ s'annulerait au point 2 en même temps que $\frac{\partial F}{\partial\alpha}$. Nous voyons que pour toute position de ce point sur la bicaractéristique λ, la relation (3) donne

et que, lorsqu'il vient au point de contact de λ avec l'arête de rebroussement, elle donne en outre

$$(4) \qquad \frac{\quad}{d\alpha^2}$$

D'après cela, si nous figurons, dans le plan des $\alpha\beta$, la ligne L représentée par l'équation (3), nous voyons qu'à l'origine des coordonnées de ce plan, elle a un contact du second ordre avec l'axe des α (autrement dit, en général, un point d'inflexion).

Or, ainsi qu'il est bien connu, entre cette ligne L et la section qui nous intéresse, les relations (3), (3′) établissent une transformation de contact [1]; et, d'autre part, on sait qu'une transformation, si elle se présente régulièrement (au sens qui va être précisé dans un instant), conserve les ordres de contact. Il est aisé de vérifier

---

[1] On sait le parti que M. Vessiot a déjà tiré de cette circonstance pour l'étude des ondes.

que les choses se passent bien ainsi. Soit, pour abréger l'écriture,

$$z = F[x, y, \alpha, \qquad | = \Phi(x, y, \alpha)$$

l'équation qu'on déduit de (1) en y remplaçant β par sa valeur en fonction de α, soit $\beta = g(\alpha)$ — en fait, par celle qu'on obtient en résolvant, par rapport à β, l'équation (3). Les dérivées partielles successives de la fonction Φ par rapport à α contiendront seulement, outre celles de F, les dérivées de même ordre au plus de β par rapport à α. L'équation (3′) qui, jointe à (3), définit le conoïde s'écrit

$$(5') \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0.$$

et le fait classique du contact entre l'enveloppe et l'enveloppée qui en résulte, s'exprime, en ce qui regarde leurs traces sur S_1, c'est-à-dire y faisant $x = x_1$, par la relation

$$(6) \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

La valeur de $\frac{dz}{dy}$ est donc indépendante de la valeur que prend la dérivée $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ telle qu'on la tire de l'équation implicite (5′). Mais pour que la transformation de contact qui permet de passer de l'équation (3) à (2) soit dite se comporter régulièrement, il importe de s'assurer que cette dernière dérivée n'est ni nulle ni infinie pour $y = z = \alpha = 0$. Or, en vertu de l'équation

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\quad} + \partial^2 \Phi \; \partial \alpha$$

qui la fournit, la première circonstance se présenterait pour

$$(8) \qquad = 0,$$

la seconde pour

(5″)

L'un et l'autre cas seront exclus. Le premier donnerait, puisque $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ est supposé identiquement nul en x pour $y = 0$, un point singulier de la ligne (5′), c'est-à-dire de la bicaractéristique considérée comme

définie par cette équation. Celle-ci, s'il se produisait, définirait en général, dans le plan des xy, outre l'axe des x, une seconde ligne coupant cet axe au point $x = x_1$. La seconde hypothèse (5″) signifierait que le point (x, o, o) appartiendrait à l'arête de rebroussement du conoïde Γ_2. Nous supposerons toujours le point 2 assez rapproché de l'écran S_1 pour qu'une telle circonstance ne puisse pas se produire.

Ceci acquis, la dérivée seconde $\frac{d^2 z}{dy^2}$ n'est autre que la dérivée totale, par rapport à y, de l'expression (5), soit [en tenant compte de (5′)]

$$(9) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha\, \partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2.$$

Dans cette formule, la quantité $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$ est fournie par (7). En résumé, les dérivées partielles de Φ par rapport à α qui figurent dans le calcul de $\frac{d^2 z}{dy^2}$ sont les dérivées première et seconde, et tels sont, par conséquent, les ordres des dérivées de β par rapport à α qui interviennent dans ce calcul. Si donc $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$ sont nuls à l'origine, la valeur initiale de $\frac{d^2 z}{dy^2}$ sur la trace du conoïde défini par les équations (5), (5′) sera bien la même que sur la trace de la surface Γ_0.

3. L'enveloppe Γ_0, qui est singulière tout le long de la caustique, peut présenter (et, dans les cas que nous examinerons plus loin, présente nécessairement) en des points isolés, une singularité plus élevée : il en est ainsi pour tout point où l'on a, outre (2), (2′) et (2″)

$$(2''') \qquad \frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} = 0.$$

Un tel point, ainsi qu'il est connu et que nous le constaterons à nouveau un peu plus loin, est, pour la caustique A, un point de rebroussement. Mais avant de le considérer en lui-même, restons encore au point de vue où nous venons de nous placer et examinons l'effet qui en résulte en ce qui concerne les relations des deux courbes (γ_0) et (γ_2), traces de Γ_0 et du conoïde Γ_2 sur l'écran S_1.

Lorsqu'au point 2, sommet du conoïde, les relations (2), (2′), (2″), (2‴) sont vérifiées simultanément, les deux lignes γ_0 et γ_2 ont,

au point $y = z = 0$, un contact du troisième ordre. C'est ce qu'on voit par un raisonnement tout semblable à celui qui précède. En premier lieu, la différentiation totale de la relation (3) donne évidem- une nouvelle relation où tous les termes contiennent un facteur $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ sauf deux nous n'aurons donc à écrire que ces deux derniers, savoir

$$\frac{\quad\beta}{d\alpha^3}$$

et, d'après ($2'''$), on a, en (x_2, y_2, z_2) et pour $\alpha = 0$, $\frac{\quad}{\partial\alpha^3} = 0$, avec $\frac{\quad}{\partial\beta}$ o.

La ligne L, lieu du point (α, β) et la droite $\beta = 0$, ayant ainsi un contact du troisième ordre, il doit en être de même des lignes (γ_2), (γ_0) qui, nous l'avons déjà noté, leur correspondent par une même transformation de contact. C'est ce qui résulte bien du calcul de $\frac{d^3z}{dy^3}$ à l'aide de (5) et de (5'). Cette dérivée, d'une manière analogue à (9), s'exprime en effet par les dérivées partielles de Φ jusqu'au troisième ordre et les dérivées de α par rapport à y jusqu'au *second*, le coefficient de la dérivée troisième étant nul d'après (5'). Or, ces dernières dérivées $\frac{d^h\alpha}{dy^h}$, qui se déduisent de (5'), n'introduisent elles-mêmes, pour $h = 1, 2$, que les dérivées de Φ jusqu'au troisième ordre et, par conséquent, les dérivées de g jusqu'au troisième ordre.

Inversement, si les lignes γ_0 et γ_2 tracées sur l'écran S_1 ont entre elles un contact du troisième ordre, la même relation existe entre les deux lignes qui leur correspondent dans la transformation de contact, à savoir l'axe des α et la ligne L définie par l'équation (3), de sorte que $\frac{d^3\beta}{d\alpha^3}$ est nul à l'origine sur cette dernière : la relation ($2'''$) est donc vérifiée au point 2.

4. Une première conséquence, aisément vérifiable sur les modèles de surfaces enveloppes de l'espèce que nous étudions en ce moment, ressort de ce que nous venons de trouver : *la caustique ne peut pas être la première singularité qui se présente lorsqu'on se déplace sur la surface* Γ_0 — par exemple sur une bicaractéristique quelconque,

à des bicaractéristiques exceptionnelles près — *en partant de la courbe* γ_0. Avant d'arriver à cette caustique, on rencontre d'abord nécessairement une *ligne double* de la surface.

Considérons en effet, à mesure que le point 2 se déplace sur la bicaractéristique λ, la déformation correspondante de la courbe γ_2, trace du conoïde qui a ce point pour sommet. Initialement, γ_2 sera une courbe fermée très petite tangente à γ_0 et entièrement située d'un même côté de cette dernière ligne.

Au contraire, lorsque le point mobile 2 sera parvenu au point de contact de λ avec la caustique, nous venons de voir qu'il y aura entre γ_0 et γ_2 un contact du second ordre et, s'il s'agit d'un point ordinaire de la caustique, du second ordre seulement. Dès lors, en un tel point de contact, les deux courbes devront se traverser, toute une partie, non infiniment petite, de la ligne γ_2 ayant changé de côté par rapport à γ_0.

Le passage direct entre une telle disposition et celle qui se présentait au point de départ est impossible. Il est nécessaire que, préalablement, la courbe γ_2 tout en restant tangente à γ_0 au pied de la bicaractéristique λ, l'ait traversée par ailleurs et que, tout d'abord, elle lui ait été tangente en un point distinct du premier. A ce moment, le point 2 devait appartenir à une seconde bicaractéristique tracée sur Γ_0 et, par conséquent, se trouver sur une ligne double de cette surface.

Ce raisonnement ne souffre d'exception que si la position finale du point 2 correspond à un contact du troisième ordre entre γ_2 et γ_0, c'est-à-dire à la singularité considérée au numéro précédent; dans ce cas, les deux courbes γ_0 et γ_2 peuvent ne pas se traverser au moment où l'ordre du contact s'élève.

5. L'une des difficultés des questions que nous avons à traiter provient assurément de la forme géométrique assez compliquée que présentent des surfaces telles que Γ_0, au voisinage de singularités telles que celles dont nous venons de parler. Mais il existe aujourd'hui des modèles en fils bien connus de surfaces de cette espèce, visibles dans toutes les collections de Géométrie. Le plus classique est la surface de pente constante passant par une ellipse.

Par contre, on ne connaissait, jusqu'à ces derniers temps, aucun

exemple analogue dans lequel la surface Γ_0 soit elle-même un conoïde, cas le plus intéressant de tous au point de vue de notre étude générale, parce que c'est celui de l'onde directe issue d'un point unique et qu'il se présente nécessairement lorsqu'on veut résoudre le problème de Cauchy, à l'exclusion des problèmes mixtes (donc de la réflexion), pour une équation aux dérivées partielles du second ordre. Dans les cas classiques où l'on sait intégrer l'équation des géodésiques et, par conséquent, déterminer le conoïde caractéristique, celui-ci ne présente pas d'arête de rebroussement. A vrai dire, indépendamment des équations à coefficients constants pour lesquels les conoïdes caractéristiques sont des cônes ordinaires, on ne peut guère citer, au moins à première vue, que le cas où l'élément linéaire initial est l'élément non euclidien de Lobatchewsky ou de Riemann : mais alors les conoïdes caractéristiques sont dépourvus de singularité autre que leur sommet (géométrie de Lobatchewsky) ou présentent (géométrie de Riemann) une singularité tout exceptionnelle et aberrante à savoir un second point conique antipode du sommet.

Cette lacune a été complétée dans un récent travail de M. Galbrun [1] consacré à la propagation du son dans une atmosphère en mouvement. Le phénomène est d'ailleurs étudié dans l'espace ordinaire et, par conséquent, dans l'espace-temps à quatre dimensions : l'équation des caractéristiques, telle qu'on la déduit des équations dynamiques du problème, est

$$(10) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial t} \qquad \frac{\partial}{\partial x} \qquad \partial \Pi \Big)^2 - c^2 \left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right)^2 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} \Big)^2 \right.$$

où $\Pi(x, y, z, t)$ est le premier membre de l'équation d'un front d'onde : u, v, c, des fonctions données de la variable z. Il est aisé de se placer dans les conditions qui nous intéressent actuellement, c'est-à-dire dans l'espace-temps à trois dimensions, en considérant les solutions indépendantes de y et supposant nulle, à cet effet, la quantité v.

(1) *Journal de Mathématiques*, t. VII, 1928 (volume dédié à MM. Appell et Picard), p. 289-318).

Les bicaractéristiques ou rayons sonores se déterminent par quadratures [1].

La discussion de leur forme (*voir* le Mémoire cité de M. Galbrun) met en évidence deux catégories, suivant que l'altitude y varie ou non toujours dans un même sens; et si l'on compare ceux de ces rayons qui partent d'un même point à un même instant, on constatera que ceux d'entre eux pour lesquels l'altitude présente un maximum touchent une même courbe, caustique de la surface d'onde.

Pour certains d'entre eux se présente même la singularité supérieure dont il a été question aux numéros précédents, à savoir un point de rebroussement de la caustique.

6. Dans une discussion qu'il se contente de résumer sommairement dans le travail cité, mais dont il a eu l'amabilité de me communiquer le détail, M. Galbrun étudie la forme de la surface autour d'un point ω de cette nature. Les résultats d'une telle étude ont d'ailleurs (*voir* le travail cité) des conséquences importantes au point de vue des phénomènes sonores. Géométriquement (du moins dans le cas simplifié où nous nous plaçons ici en faisant abstraction de l'une des variables), ils mettent en évidence une forme tout analogue à celle que l'on constate dans les mêmes conditions (c'est-à-dire au voisinage des points ω) sur la surface de pente constante menée par une ellipse, et qui, pour les surfaces algébriques, a été décrite par G. Fontené [2].

Il est aisé de voir que cette forme — sorte de trièdre à deux dièdres

[1] L'équation (C) admet l'intégrale complète

$$\alpha x \quad \beta t + \gamma y + \delta + \varpi(z), \qquad \varpi(z) = \int \sqrt{\frac{1}{c^2}(\beta +}$$

aux constantes arbitraires α, β, γ, δ, d'où l'on déduit immédiatement les équations des bicaractéristiques cherchées [équations (23), (28) de M. Galbrun]. C'est cette intégrale (en y annulant la fonction φ et la constante ν), qui, résolue par rapport à z, donnerait, en l'espèce, l'équation (1) qui nous sert de point de départ.

[2] *Nouv. Ann. de Math.*, 1907, p. 433 et suiv. *Voir* particulièrement page 437 et la figure correspondante.

nuls ayant son sommet au point ω — s'applique au cas général d'une enveloppe telle que nous l'avons considérée dans ce qui précède.

Si la famille de surfaces (2) est telle que, pour $x = y = 0$, $\alpha = 0$, on ait, outre $F = 0$, les relations (2′), (2″), (2‴), on peut, par un changement de variable régulier exécuté sur le paramètre α, combiné avec une transformation ponctuelle régulière sur le point (x, y, z), écrire son équation générale sous la forme

$$z = F(x, y, \alpha) = \alpha y - \alpha^2 x + \alpha^3(lx + my + \ldots) + \alpha^4(1 + \ldots) + \ldots. \tag{11}$$

L'équation (2′) s'écrit

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0 = y - 2\alpha x + 3\alpha^2(lx + my + \ldots) + 4\alpha^3(1 + \ldots) + \ldots \tag{11'}$$

et peut se résoudre par rapport à y sous la forme

$$y = (2\alpha - 3l\alpha^2)x - 4\alpha^3(1 + \ldots) + \ldots = \psi(x, \alpha), \tag{12}$$

le premier membre de (11′) ne différant d'ailleurs de $y - \psi(x, \alpha)$ que par un « facteur unité », c'est-à-dire par un facteur développable (au moins jusqu'à un certain ordre) suivant les puissances de x, y, α avec un terme constant différent de zéro. Les équations (11) et (11′) ou (12) définissent notre enveloppe. Celle qu'il faut leur adjoindre pour définir la caustique s'écrit

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = (2 - 6l\alpha)x - 12\alpha^2(1 + \ldots) + \ldots = 0. \tag{11''}$$

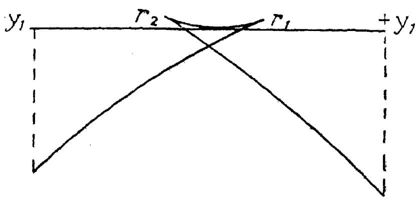
Les valeurs de x, y, z, telles que les fournissent successivement, en fonction de α, les équations (11″), (11′), (11), commençant respectivement par des termes en α^2, α^3, α^4, on voit bien, tout d'abord, que la caustique présente un rebroussement à l'origine.

Donnons maintenant à x une valeur déterminée très petite et étudions la section correspondante de la surface. Soit d'abord $x > 0$. Pour α infiniment petit, il apparaît sur les équations (12) et (11) que z aura le signe + et y le signe de α; que, en outre, y est fonction croissante de α dans un certain intervalle de valeurs de α autour de zéro, intervalle limité par les deux valeurs $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 < 0$ de α pour lesquelles $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ s'annule.

Lorsque α atteint et dépasse en croissant la valeur α_1 (ou, en décroissant, la valeur α_2), $\frac{dy}{d\alpha}$ s'annule et change de signe, et il en est de même de la quantité

$$\frac{dz}{d\alpha} = \frac{dy}{d\alpha}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dy}{d\alpha}(\alpha + \ldots)$$

$\frac{dz}{dy}$ est d'ailleurs, d'après cette dernière équation, fonction croissante de α pour x et α assez petits, de sorte que, aux deux points r_1, r_2 correspondant à $\alpha_1 = \alpha_2$, α (points de la caustique) prennent respectivement naissance deux nouveaux arcs entièrement situés au-dessous de l'arc primitif (figure ci-dessous). Sur chacun d'eux, y,



d'abord décroissant en valeur absolue, continue à varier dans un sens constant : il croîtra sur l'un de ces nouveaux arcs au moins jusqu'à une certaine valeur positive fixe y_1 et décroîtra sur l'autre au moins jusqu'à $y = -y_1$. Si x a été pris assez petit en valeur absolue pour que les y de l'arête de rebroussement soient compris entre $-y_1$ et $+y_1$, les deux arcs en question devront se couper. La figure ainsi obtenue est bien celle à laquelle est arrivé M. Galbrun et conforme à ce que l'on constate sur le modèle connu de surface à pente constante.

Pour $x < 0$, les choses sont plus simples : dans un certain intervalle de valeurs du paramètre, z est toujours négatif et y du signe de $-\alpha$, de sorte qu'on a une nappe d'apparence régulière située au-dessous du plan des xy.

L'arc primitif, tangent au plan des xy, engendre, lorsque x varie en restant positif, une première face (face supérieure) du trièdre, caractérisée, comme on le voit, par le fait que le premier membre

de (11″) est positif; les deux autres arcs, sur lesquels $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$ est négatif, engendrent, pour $x > 0$, deux faces intérieures se coupant suivant une ligne double et continuant, de part et d'autre de l'axe des x, la nappe unique qui correspond à $x < 0$.

Chaque bicaractéristique voisine de l'axe des x a, avec l'arête de rebroussement, un point de contact dont l'abscisse x', toujours positive, est donnée par (11″). La face supérieure du trièdre est engendrée par les arcs de bicaractéristiques correspondant à $x > x'$; les arcs correspondant à $x < x'$ engendrent respectivement les deux faces inférieures et, pour $x < 0$, la nappe sans singularité.

On voit, en particulier, conformément à ce que nous aurons à constater dans un instant, qu'un point tel que ω appartient à une ligne double de la surface, ligne qui s'arrête en ce point. Il appartient d'ailleurs à la catégorie connue des « points pinces ».

7. Sur la surface S_1, qui est toujours supposée surface d'espace, soit tracée la courbe γ_0 supposée *fermée*, délimitant, sur S_1, une aire déterminée, et prenons pour Γ_0 l'une des deux nappes caractéristiques qui passent par cette courbe. Supposons que chacune des bicaractéristiques tracées sur Γ_0 donne un point de l'arête de rebroussement et, par conséquent, d'après ce qui précède, un point de la ligne double, de sorte que l'une et l'autre de ces lignes sont fermées.

Existera-t-il sur la première d'entre elles des points de rebroussement ?

Au premier abord, il n'y a aucune raison pour qu'il en soit ainsi. Prenant une courbe fermée A arbitraire — donc, en général, dépourvue de points de rebroussement —, rien n'empêche de mener, par chacun de ses points, une surface Γ_0 ayant avec elle un contact du second ordre. L'enveloppe de ces surfaces aurait A pour arête de rebroussement.

Il en est autrement lorsque la surface variable vérifie une équation aux dérivées partielles de la catégorie considérée dans ce qui précède, c'est-à-dire dont le cône caractéristique en chaque point est convexe. C'est ce que nous allons montrer moyennant une précision apportée sur un point à nos hypothèses géométriques précédentes. Nous supposerons que S_1 fait partie d'une famille à un paramètre composée de surfaces, qui toutes sont surfaces d'espace en chacun de leurs

points et dont il passe une et une seule par chaque point de la région considérée ([1]).

Cette hypothèse permet évidemment de distinguer, sur chaque cône caractéristique et sur chaque conoïde caractéristique, une nappe positive et une nappe négative, chacune de ces nappes variant d'une manière continue avec la position du sommet, et d'assigner de même, sur chaque bicaractéristique, un sens positif.

Soient alors considérées, en un point quelconque 2 de Γ_0 situé entre la ligne γ_0 et la ligne double, la bicaractéristique correspondante λ et la bande infiniment petite de surface voisine de cette bicaractéristique. Nous serons conduit à distinguer, sur cette bande ou sur toute autre surface caractéristique tangente, un côté droit et un côté gauche, à savoir ceux que distinguerait un observateur placé suivant le sens positif de la bicaractéristique et regardant l'intérieur de la nappe positive.

En particulier, il en résulte un choix déterminé de sens direct sur la ligne γ_0.

Si, au point 2, deux surfaces caractéristiques se coupent et si, sur la tangente à la ligne d'intersection, on fait choix d'un sens, il est clair que la demi-droite ainsi considérée sera de côtés différents par rapport aux deux directions bicaractéristiques.

Or, c'est précisément ce qui se produira en un point 2 pris arbitrairement sur la ligne double de notre surface Γ_0 et par lequel passent deux bicaractéristiques issues respectivement de deux points 1 et 1′ de γ_0.

Tant que les deux points 1 et 1′ et, par conséquent, aussi les deux plans tangents au point 2 seront distincts, il existera, en vertu du théorème des fonctions implicites, un arc de ligne double comprenant ce point à son intérieur et le long duquel on pourra cheminer dans un sens déterminé quelconque. Il résulte de ce qui précède que, dans ce cheminement, *les deux points* 1 *et* 1′ *se déplaceront en sens contraires*.

Un tel cheminement ne pourra être arrêté que par l'une des deux circonstances suivantes :

([1]) Dans toutes les applications de Physique mathématique, les surfaces $t =$ const. t désignant le temps, possèdent la propriété dont il s'agit.

1° Ou bien le point 2 s'éloignera à l'infini sur la nappe de surface Γ_0 ;
2° Ou bien les points 1 et 1′ viendront à coïncider.

Nous avons, par hypothèse, exclu le premier de ces deux cas. Dans le second, le conoïde caractéristique de sommet 2 a, avec la ligne γ_0, quatre intersections confondues, ce qui montre que 2 est un point de rebroussement de la caustique.

C. Q. F. D.

LA PROPAGATION DES ONDES

LES CAUSTIQUES

(*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 5, 1932.)

Le présent travail fait suite à ceux que nous avons publiés sur le principe de Huygens — ou, plus exactement, sur la « majeure de Huygens » — pour les équations à trois variables indépendantes, et particulièrement [1] à ceux qui ont été insérés au *Journal de Mathématiques* en 1929 et aux *Acta Mathematica* en 1930 [2], lesquels seront respectivement désignés par les abréviations *J. M.* et A_2.

Le premier de ces deux Mémoires était consacré au théorème d'addition intégral qui résulte de la majeure de Huygens, dans l'hypothèse où, entre leurs points extrêmes, les ondes considérées ne présentent aucune singularité, autrement dit, n'ont pas de points communs avec une caustique. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'examiner ce qui se passe lorsqu'on renonce à cette hypothèse.

(1) Voir aussi *Bull. Soc. Math. franç.*, t. LII, 1924, p. 141.

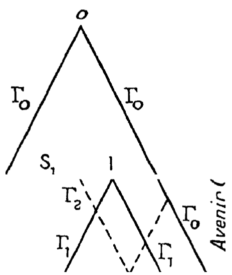
(2) *Journ. de Math.*, t. VIII (volume publié en l'honneur de MM. Appell et Picard, 1929), p. 197; *Acta Math.*, t. LIV (volume publié en hommage à Fredholm, 1930, p. 247).

L'onde rétrograde issue d'un point o et relative à une équation linéaire du second ordre hyperbolique

$$\sum_{i,j=1,2,3} A^{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j} + \sum_{i=1,2,3} B^i\frac{\partial u}{\partial x^i} + Cu = \varphi$$

ou plutôt la nappe conique Γ_0 qui la représente dans l'espace à trois dimensions sera donc, comme précédemment, coupée par deux surfaces successives S_1, S_2 (*fig.* 1) ayant toutes deux, en chacun de leurs points, une orientation d'espace et qui délimiteront avec elle

Fig. 1.



deux régions bornées de l'espace. Dans la première de ces deux régions, on admettra encore, comme nous l'avions fait jusqu'ici, que tout point peut être joint au point o par une géodésique bien déterminée de l'élément linéaire

$$) = \Sigma H_i$$

qui correspond à l'équation ([1]), de sorte que le déterminant fonctionnel désigné par J dans nos *Leçons de Yale* ([2]) sera différent de zéro dans la région en question, partout ailleurs qu'au sommet du conoïde et que la quantité Γ_0, carré de la distance géodésique à ce

([1]) Voir nos *Lectures on Cauchy's problem*, Cambridge New Haven, nos 55 à 56, 1932, p. 117-119 (traduction française, Paris, Hermann).

([2]) *Lectures on Cauchy's problem*, Livre II, n° 57 *bis*, p. 122-123 de l'édition française.

sommet, aura partout une valeur déterminée. C'est ce que nous appellerons l'hypothèse α.

Nous continuerons également à admettre une hypothèse analogue — dite hypothèse β — en ce qui concerne la nappe de conoïde rétrograde issue d'un point quelconque 1 de S_1, dans toute la région limitée par cette nappe et la surface S_2 et, de même [1], pour la nappe directe de conoïde ayant pour sommet un point quelconque 2 de S_2 dans toute la région délimitée par cette nappe et la surface S_1.

Par contre, nous avions également admis, dans nos travaux antérieurs, et en particulier, dans *J. M.*, que les choses se passaient de même pour le conoïde rétrograde de sommet o, jusques et y compris sa rencontre avec S_2. C'est cette dernière hypothèse — dite hypothèse γ — qui ne sera plus maintenue dans le travail actuel. Au niveau de la surface S_2, le déterminant fonctionnel J (toujours formé à partir du point o) sera susceptible de s'annuler, et la quantité Γ_{02} pourra cesser d'être une fonction bien déterminée et régulière des coordonnées du point 2. Si ces circonstances se produisent à l'*intérieur* du conoïde Γ_0, elles ne donnent lieu, comme nous le verrons (*cf.* 12), à aucune difficulté; nous aurons, au contraire, à les étudier spécialement lorsqu'elles intéressent la nappe conoïdale elle-même, représentative de l'onde rétrograde issue de o, c'est-à-dire lorsque celle-ci ou, plus généralement, une onde incidente [2] quelconque (*voir* plus loin, n° 7) présente une caustique qui rencontre la surface S_2. Nous devrons, à cet effet, utiliser l'étude géométrique qui a été faite de ce nouveau cas dans le Mémoire A_2, Mémoire dont, en conséquence, les résultats serviront de base à ce qui va suivre.

Nous avons même à compléter sur quelques points ces remarques géométriques. Les notations de A_2 et de *J. M.* n'étant pas les mêmes, je préfère, pour plus de clarté, commencer par donner, en me plaçant

[1] Ces deux parties de l'hypothèse β sont, dans une certaine mesure (mais dans une certaine mesure seulement), équivalentes l'une à l'autre, en ce sens que le déterminant fonctionnel analogue à J, formé à l'aide des deux points 1 et 2, est le même à un facteur près différent de zéro, quel que soit celui de ces deux points que l'on considère comme point de départ, ainsi qu'il résulte du n° 170 de nos *Leçons sur le problème de Cauchy* (p. 374-377 de l'édition française).

[2] Comme nous l'avons dit (*Journ. de Math.*, note de la page 220), il s'agit d'une onde incidente rétrograde.

dans la première d'entre elles, les indications complémentaires pour lesquelles elle convient particulièrement.

I.

1. Prenons donc tout d'abord, comme dans A_2, pour axe des x une bicaractéristique située sur l'onde incidente Γ_0; pour plan des x, y, une caractéristique régulière admettant cette bicaractéristique, — de sorte qu'on peut écrire une intégrale complète régulière

telle que le second membre s'annule identiquement en x, y pour $\alpha = \beta = 0$ —, l'onde incidente Γ_0 étant la détermination de l'intégrale générale que l'on obtient en prenant α variable et β identiquement nul et, par conséquent, en éliminant α entre les équations $z = F(x, y, \alpha, 0)$ et

$$\partial F \qquad , 0) = 0.$$

De plus, la bicaractéristique définie par les deux équations précédentes pour $\alpha = 0$, est supposée être l'axe des x.

Une autre caractéristique se raccordant avec les premières tout le long de cet axe s'obtiendra comme enveloppe de la surface

$$z = \Phi(x, y, \alpha) = F[x, y, \alpha, g(\alpha)]$$

obtenue en remplaçant, dans l'intégrale complète, β par la fonction (nulle à l'origine ainsi que sa dérivée)

Entre deux surfaces de cette espèce, correspondant à deux choix différents de la fonction (2), le contact est du même ordre tout le long de la bicaractéristique et du même ordre que celui du contact entre les deux courbes (2). On peut même préciser d'une manière assez remarquable la manière dont la courbure $\frac{d^2 z}{dy^2}$ dépend x ou, plutôt, dépend simultanément de x et du choix de la fonction g. Celle-ci interviendra par sa dérivée seconde initiale $g''(0) = \mu$ et

l'on aura

(3) $$d^2 z \qquad \frac{A}{B}$$

les quantités A, B dépendant de x, mais non du choix de la fonction g.

En effet, la combinaison des deux formules (7) et (9) du Mémoire A_2 donne, pour $\frac{d^2 z}{dy^2}$, la valeur

$$\frac{}{\partial y^2} \qquad \Big(\overline{\partial x\, \partial y}$$

Ici, le premier terme est nul, puisque, dans notre système de coordonnées actuel, $z = \Phi$ est représentée par un plan. D'autre part, toujours en raison de $g'(0) = 0$, la valeur de $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y}$ se réduit à $\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}$, celle de $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$ à $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \beta} g''$, d'où

(3″) $$\frac{\overline{\partial x\, \partial y}}{\partial F}$$

ce qui donne bien, pour la courbure en question, une expression de la forme (3).

Au reste, le même fait ressort de la théorie générale des caractéristiques. Celle-ci nous apprend [1] que pour une équation aux dérivées partielles du premier ordre

qu'il convient à cet effet de remplacer par l'équation

$$r\frac{\partial X}{\partial p} + s\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{\partial X}{\partial x} \qquad \frac{\partial X}{\partial z}$$

que l'on en déduit par une différentiation), la variation de r le long d'une bicaractéristique obéit à une équation de Riccati. En l'espèce, cette équation admettrait une solution nulle, c'est-à-dire se réduirait

[1] GOURSAT, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 2ᵉ série, t. VIII, 1906, p. 427 et suiv. particulièrement nº 6, p. 438-439. *Voir* notre *Cours d'Analyse*, t. II, nº 355, 1930, p. 456 (Paris, Hermann).

à une équation de Bernoulli, dont l'intégrale générale est bien de la forme (3).

Pour α différent de zéro et voisin de zéro, la valeur de $\frac{d^2 z}{dy^2}$ dépendra encore homographiquement de μ : elle sera donnée par la formule (3').

2. Comparons en particulier, à ce point de vue, l'onde incidente Γ_0 avec le conoïde direct ayant pour sommet un point 2 pris sur la courbe de section [1] τ de cette onde par la surface S_2. Pour ce conoïde, la fonction g est donnée par l'équation

$$z_2 = F(x_2, y_2, \alpha, \beta) = F(x_2, y_2, \alpha, g),$$

x_2, y_2, z_2 étant les coordonnées de ce point 2. L'équation (1) étant encore vérifiée en ce point, tandis que $\frac{\partial F}{\partial \beta}$ est différent de zéro [2], ceci donne encore $g' = 0$; puis g'' est donné par

$$\frac{\partial^2 F(x_2, y_2, \alpha, 0)}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial F}{\partial \beta} g'' = 0.$$

Si le point 2 appartient à une caustique de l'onde Γ_0, ce que nous supposerons avoir lieu pour $\alpha = 0$, il satisfait à la relation

$$: 0,$$

ce qui donne, pour g'', la valeur zéro. A partir de cette position, déplaçons le point 2 sur la courbe de section τ, supposée non tangente à la bicaractéristique, α prenant alors une valeur différente de zéro que nous considérerons comme infiniment petit principal. On voit que la nouvelle valeur de g'' sera un infiniment petit du même ordre que celle de $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}$. Or, si dans le plan des x, y, nous considérons la famille de courbes

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

(1) Nous réserverons cette dénomination à la courbe dont il s'agit, par opposition aux autres traces (trace de Γ_0 sur S_1; traces de conoïdes ayant leurs sommets sur S_1 ou sur S_2) dont elle est l'analogue d'après sa définition en raison du rôle spécial qu'elle jouera dans ce qui va suivre : en particulier elle seule aura des singularités.

(2) A_2, note de la page 250.

$\left(\text{en l'espèce, } f \text{ représente la dérivée } \frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)$, donnant l'axe des x pour $\alpha = 0$ de sorte que l'on aura, pour α voisin de zéro,

$$f = y f_0 + \alpha f_1 + \alpha^2 f_2, \tag{4'}$$

le coefficient f_1 de α étant nul au point de contact avec l'enveloppe de la famille (4) (point que nous pourrons par exemple prendre comme origine) et si, d'autre part, les deux autres coefficients f_0, f_2 sont différents de zéro au même point, la forme de l'équation $f = 0$ montre que, sur un chemin issu de l'origine et non tangent à l'axe des x (de sorte que x est un infiniment petit de l'ordre de y au moins), y est un infiniment petit d'ordre 2 exactement en α et

un infiniment petit du premier ordre. Appliquant ceci à la projection de notre figure de l'espace sur notre plan des x, y, nous voyons que $\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}$ et, par conséquent, $g''(\alpha)$ seront des infiniment petits du premier ordre exactement. Il en sera de même dès lors, d'après l'expression (3) dans laquelle le numérateur $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial y}\right)^2$ est différent de zéro [1], pour la différence qui existe, sur la surface S_1, entre les courbures des traces de l'onde et du conoïde direct ayant pour sommet le point 2 variable sur la courbe de section τ.

Quant aux deux hypothèses $f_0 = 0$, $f_2 = 0$, la première est exclue d'une manière analogue à ce qui a été dit [2] dans A_2, comme impliquant, au point 2, une singularité de la bicaractéristique; la seconde, soit $\frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3} = 0$, signifierait (cf. A_2, n^{os} 3, 6) que la surface S_2 passe par un point de rebroussement de la caustique.

3. Nous ferons maintenant porter notre comparaison sur le conoïde direct ayant pour sommet le point 2 de l'axe des x — appar-

(1) A_2, p. 253.
(2) Page 253. La remarque faite en cet endroit concerne le point 1, mais s'applique sans modification au point 2.

tenant ou non à la caustique — et sur le conoïde rétrograde ayant pour sommet le point 1 d'abscisse un peu inférieure [1] à celle de la surface écran S_1. Si, tout d'abord, le point 2 est lui-même très voisin de S_1, mais du côté positif, les traces de ces deux conoïdes sur S_1 seront deux petites ovales extérieures l'une à l'autre. Lorsque nous déplacerons ensuite continuellement le point 2 le long de l'axe des x, dans le sens positif, jusqu'à l'amener sur S_2, il n'arrivera pas que la valeur correspondante de $g''(0)$ devienne égale à celle qui convient au conoïde de sommet 1 : car, comme on le voit en raisonnant sur ce dernier conoïde comme nous l'avons fait sur Γ_0, cela signifierait qu'il admettrait une caustique passant par le point 2, contrairement à l'hypothèse β. Il n'arrivera pas non plus que les traces des deux conoïdes soient tangentes en un second point, car ils auraient alors une seconde bicaractéristique commune [2] joignant le point 1 au point 2, ce qui serait encore contraire à l'hypothèse β. Ces deux traces resteront donc, jusqu'au bout, tangentes *extérieurement* l'une à l'autre.

Dans ces conditions portons, dans S_1, sur une ligne partant de l'origine et non tangente au plan des x, y — par exemple sur l'axe des z, si S_1 a pour équation $x = 0$ —, et cela dans le sens positif, qui sera supposé dirigé vers l'intérieur de la petite aire découpée par le conoïde de sommet 1, une petite longueur qui sera considérée comme l'infiniment petit principal. D'après l'hypothèse β, l'extrémité $\bar{1}$ de cette longueur pourra être jointe au point 2 par une géodésique faisant avec le conoïde, au sommet 2 de ce conoïde, un angle du même ordre que la distance du point $\bar{1}$ à la trace du conoïde en question, c'est-à-dire du premier ordre. Une telle géodésique sera d'ailleurs extérieure au conoïde (géodésique *d'espace*) et donnera, par conséquent, pour la quantité H, une valeur négative et infiniment petite du premier ordre seulement. Comme la valeur de H

[1] Le sens positif sur l'axe des x est supposé comme dans A_1, le sens rétrograde, celui qui va de S_1 à S_2.

[2] Par un élément de contact sur S_1, passent deux bicaractéristiques, mais on a vu dans *Journ. Math.*, 10, comment il y a lieu de choisir entre elles, et ce choix est manifestement le même pour les deux conoïdes, puisqu'il s'agit de directions toutes deux très voisines de la bicaractéristique primitive.

est constante le long de cette géodésique, celle-ci sera également, au point 1, extérieure au conoïde correspondant et fera, avec la direction de toute géodésique $\overline{\mathcal{L}}$ issue de $\overline{1}$ et intérieure à ce conoïde, un angle qui ne pourra être infiniment petit d'ordre supérieur au premier. Donc encore, le point $\overline{2}$, trace de la géodésique $\overline{\mathcal{L}}$ sur S_2, sera à une distance du point 2 qui — toujours d'après l'hypothèse β — ne pourra être infiniment petite d'ordre supérieur au premier.

Au point 2, sur la surface S_2, que nous pouvons supposer être aussi un plan $x =$ const., le sens positif sur l'axe des z sera encore dirigé vers l'intérieur du conoïde de sommet 1. Il sera également dirigé vers l'intérieur du conoïde de sommet $\overline{1}$, infiniment voisin du premier. Ces deux conoïdes ne sauraient se couper au voisinage du point 2 considéré : car leur intersection serait le sommet d'un conoïde direct infiniment voisin de Γ_2 et dont la trace sur S_1 passerait par les points 1 et $\overline{1}$, alors que toute corde d'une telle trace, infiniment petite et infiniment voisine du point 1, ne peut avoir qu'une direction infiniment voisine de celle de l'axe des y. Dès lors la ligne $\gamma_{\overline{1}}$, trace sur S_2 du conoïde de sommet $\overline{1}$, sera du côté des z positifs par rapport à la trace γ_1 du conoïde de sommet 1, c'est-à-dire sera tout entière intérieure à ce conoïde; et il en sera de même du point $\overline{2}$.

La géodésique 1, $\overline{2}$ sera donc une géodésique de temps : elle correspondra à une valeur de H positive et infiniment petite du premier ordre seulement. Donc la trace sur S_1 du conoïde de sommet $\overline{2}$ passera dans la région $z > 0$, à une distance infiniment petite du premier ordre (et non d'ordre supérieur) du point 1.

On voit que ces considérations, qui peuvent paraître évidentes par elles-mêmes dépendent de la seule hypothèse β et ne sont pas influencées par les singularités possibles de Γ_0.

Ces points notés, nous reprendrons, en les simplifiant un peu [1], les notations de *J. M.*

[1] L'onde Γ_0, dont l'équation, dans la notation de A_2, était de la forme $z = y^2\psi(x, y)$ aura pour équation, dans le système de coordonnées qui sera considéré au n° 11, $y = 0$: sur cette surface, notre bicaractéristique initiale (axe des x du Mémoire A_2) sera définie par l'équation complémentaire $x = 0$. Enfin, l'écran S_1 ($x = x_1$ dans la notation de A_2) pourra être pris, dans ce qui va suivre, comme plan des x, y, en définissant, par exemple, z comme une distance transversale à S_1, mesurée avec la forme métrique H.

II.

4. Conformément à ce qui a été fait dans *J. M.* et dans nos autres travaux précédents sur le principe de Huygens, nous continuerons à prendre comme point de départ la formule (¹)

$$(\mathrm{F}) \qquad 2\pi u_0 = \iint_{S_1} v_{01} u'_1 \, dS_1 - \frac{d}{d\nu} \iint_{S'_1} v_{01'} u_1 \, dS_1 + \iint_{S_1}]$$

qui résout le problème de Cauchy, en exprimant la valeur de l'inconnue u au point o en fonction des valeurs u_1 de cette inconnue et des valeurs u'_1 de sa dérivée transversale en tous les points de la surface S_1, la portion utile (²) de cette surface, celle à laquelle est étendue l'intégration, étant celle qui est comprise à l'intérieur du conoïde caractéristique Γ_0 de sommet o. Comme dans le Mémoire *J. M.*, les trois termes de cette formule seront respectivement désignés par (*a*), (*b*), (*c*), ce dernier terme étant toujours d'une étude plus simple que les premiers, de sorte que les résultats qui le concernent peuvent être écrits sans qu'il y ait lieu d'insister sur leur démonstration. La quantité

$$V$$

est la solution élémentaire, solution de l'équation (E) par rapport aux coordonnées du point o et de son adjointe (ε) par rapport aux coordonnées du point 1. Dans le terme (*b*), on doit différentier par rapport à ν l'intégrale double

étendue successivement à la portion (²) de S'_1 comprise dans le conoïde Γ_0 et à la portion analogue d'une surface S_1 menée à une

(¹) Nous nous dispenserons, pour simplifier, d'affecter de l'indice 1 la lettre ν, pour désigner la transversale à S_1, la notation ν_2 étant toujours employée pour désigner la transversale à S_2.

(²) Comme dans nos travaux précédents, ce sera cette région qui sera plus spécialement désignée par la notation S_1, la même convention étant faite en ce qui regarde S_2.

distance transversale constante très petite ν de S_1, les valeurs de u étant prises les mêmes en deux points correspondants 1 et 1′ de S_1 et de S'_1, c'est-à-dire en deux points qui sont projection transversale l'un de l'autre. La même convention s'applique à l'élément de surface dS_1; au contraire, la quantité v doit être calculée pour les points o et 1 dans un cas, pour les points o et 1′ dans l'autre. Le terme (a) peut d'ailleurs, comme nous l'avons fait dans *J. M.*, se mettre également sous la forme d'une dérivée par rapport à ν, celle de l'intégrale

$$\iint_{S_1} v_{01}\, u_{1'}\, dS_1 \qquad (5\,bis)$$

avec la convention, contraire à la précédente, que la valeur de u est prise différente au point 1 et au point 1′, tandis que la valeur de v est la même en ces deux points (ainsi que l'élément de surface).

5. Il n'est pas sans intérêt pour nous de préciser une manière dont peut s'effectuer, dans le terme (b), la différentiation de l'intégrale (5) sans que la singularité de la solution élémentaire le long du conoïde caractéristique donne lieu à aucune difficulté. C'est à quoi nous arriverons aisément en considérant un point arbitraire de S_1 comme défini par la géodésique L qui le joint au point o. En vertu de l'hypothèse α faite sur la situation relative de ce point et de la surface S_1, les deux paramètres ξ, η qui définissent la direction d'une géodésique au départ de o pourront être considérés comme coordonnées curvilignes sur S_1, l'élément de cette dernière surface étant de la forme

$$K\, d\xi\, d\eta \qquad (6)$$

avec $K \neq 0$. Il est clair que, dans un pareil système de coordonnées, la trace du conoïde caractéristique de sommet o aura la même équation, quelle que soit la surface de section S_1.

6. Plus précisément encore, nous pouvons écrire

$$H = \omega_3^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2,$$

les polynomes

étant du premier degré en dx^1, dx^2, dx^3, avec des coefficients fonctions régulières des x, au moins dans une petite région autour de la position considérée du sommet du conoïde o. Si alors nous posons

$$\omega_1(\dot{x}; x) \qquad \omega_2(\dot{x}; x),$$

où les $\dot{x}^i$ sont des valeurs de $\frac{dx^i}{ds}$ au sommet, nous pourrons, à chaque système de valeurs de ξ, η, faire correspondre des valeurs déterminées (et non plus seulement des rapports mutuels) des x — par exemple, en prenant

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{\sqrt{\Sigma(dx^i)^2}},$$

ces valeurs des $\dot{x}$ étant fonctions régulières de ξ, η et des x. Dans ces conditions, la quantité Γ_{01} sera le produit d'un facteur différent de o tant sur S_1 que sur S'_1 par la quantité $1 - \xi^2 - \eta^2$, toujours la même quelles que soient non seulement la surface de section S_1, mais même la position du sommet o. Ce facteur étant le seul qui donne lieu à singularité dans la quantité

une différentiation quelconque effectuée sur φ_{01} n'élèvera pas l'ordre de la singularité puisqu'elle n'affectera que le numérateur régulier V_{01}. Il ne se présentera donc aucune difficulté dans la différentiation de l'intégrale (5) par rapport à ν et même, un nombre de fois quelconque, par rapport aux coordonnées du sommet du conoïde (telle qu'on aura à l'appliquer à la quantité u_1 définie par la formule (F_1), pour la substituer dans (F) (*cf.* n° 8).

7. Nous avons, jusqu'ici, considéré uniquement une onde rétrograde émanant d'un point fixe de l'espace-temps. Mais des circonstances plus générales peuvent se présenter, par exemple dans le cas d'une réflexion. Analytiquement, ce phénomène se traduit par la résolution d'un « problème mixte » et introduit ([1]), outre la

([1]) Voir *Le problème de Cauchy*, Appendice II, p. 223 (Paris, Hermann).

fonction φ, une autre fonction (φ), singulière sur l'onde réfléchie, c'est-à-dire sur une caractéristique qui n'a plus de point conique, laquelle caractéristique découpera, sur une surface telle que S_1, une certaine région intérieure. Il y aura encore lieu de différentier par rapport à ν (c'est-à-dire par rapport à la substitution de S'_1 à S_1) une intégrale double étendue à une région de cette espèce : la méthode précédente permettra d'éviter toute difficulté dans cette différentiation si l'on a, dans la portion d'espace intérieure à la caractéristique dont il s'agit et au moins au voisinage de S_1, défini des coordonnées curvilignes ξ, η, s satisfaisant aux conditions suivantes :

$\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$, ces deux constantes satisfaisant à une relation

$$\Psi(\xi, \eta) = 0, \tag{7}$$

représentera une bicaractéristique située sur Γ_0;

Pour $\Psi(\xi, \eta) > 0$, ces mêmes équations $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$, définiront une géodésique $\mathfrak{L}$ orientée dans le temps ou même de longueur nulle, ligne qui, ne pouvant être nulle part tangente à la surface d'espace S_1, sera supposée la couper à l'intérieur de l'aire délimitée par Γ_0.

Dans toute région où l'onde incidente (onde issue d'un point d'univers unique o ou onde provenant de réflexions ou de réfractions antérieures) sera dépourvue de caustique, une pareille congruence $\mathfrak{L}$ et de pareilles coordonnées pourront être définies.

Remarque. — Lorsqu'on opérera comme il vient d'être dit dans ce numéro ou dans l'un des deux précédents, on devra, dans la différentiation de u_1, ainsi que dans celle du facteur K qui figure dans l'expression (6) de dS_1, tenir compte de ce que le calcul de ces deux quantités introduit la projection transversale, sur S_1, d'un point arbitraire 1' de S'_1. Soient x^1, x^2, x^3 les coordonnées de cette projection; $\frac{\partial x_i}{\partial \nu}$ leurs dérivées lorsque le point 1' ainsi projeté variera en fonction de ν sans changement de ξ, η (de sorte que 1' sera l'intersection de S'_1 avec la géodésique ou la ligne $\mathfrak{L}$ qui viennent d'être considérées). On devra avoir

les π_i étant les paramètres directeurs du plan tangent à S_1 ; et, d'autre part, d'après la relation qui existe entre les points 1 et 1′,

$$\partial x^i \qquad \frac{dx^i}{d\nu} \qquad \frac{\partial x^i}{\partial s} \qquad \cdot\ ;$$

les dérivées x^i étant, cette fois, prises au point 1′ et ρ désignant la dérivée $\frac{ds}{d\nu}$: cette dernière quantité ρ se déterminera en portant les valeurs précédentes dans (8), son coefficient dans l'équation ainsi obtenue étant différent de zéro puisque la ligne $\xi =$ const., $\eta =$ const. n'est pas tangente à S_1. Les dérivées finies et régulières ainsi obtenues pour les coordonnées spatiales de la projection permettront de calculer les dérivées des coordonnées curvilignes correspondantes sur S_1, dérivées que l'on pourra, à leur tour, différentier par rapport à ξ, η, de manière à en déduire la dérivée, par rapport à ν, du déterminant fonctionnel et du facteur K qui permet d'exprimer, à l'aide de $d\xi\, d\eta$, la projection transversale de l'élément superficiel dS'_1 décrit par le point 1′. Ce sont ces dérivées, toutes régulières, qui serviront à différentier l'intégrale (5) dans les conditions indiquées.

8. Nous aurons, comme dans *J. M.*, à combiner la formule (F) avec la formule analogue

$$(\mathrm{F}_1) \qquad \frac{d}{d\nu_2}\int\!\!\int v_{12'}u_2\, dS_2 + \int$$

dans laquelle le point o est remplacé par un point 1 de S_1 (ou par un point 1′ de S'_1), S_1 étant remplacé par S_2 ou S'_2; et, comme dans ce Mémoire, ceci conduira à introduire, outre les traces de l'onde incidente Γ_0 sur S_1 ou sur S'_1 :

La nappe rétrograde Γ_1 de conoïde ayant pour sommet un point 1 ou 1′, et sa trace γ_1 sur S_2 ou S'_2;

La nappe directe Γ_2 de conoïde ayant pour sommet un point 2 ou 2′ de S_2 ou de S'_2, et sa trace γ_2 sur S_1 ou S'_1.

Dans les hypothèses où nous nous plaçons, les nappes conoïdales de ces deux catégories, limitées à S_2 ou S'_2, l'autre à S_1 ou S_1, ne présenteront pas de caustiques.

La condition que la trace de la seconde d'entre elles sur S_1 ait des points intérieurs communs avec celle de Γ_0 définit la région de S_2 ou de S'_2 intérieure à l'onde. Lorsque le point 2 sera sur l'onde elle-même, les deux traces seront tangentes extérieurement ([1]). Elles seront tangentes intérieurement lorsque le point 2 appartiendra à ce que nous avons appelé dans notre travail précédent, l' « onde interne » et que nous préférerons, dans celui-ci, désigner par le terme plus topique de « pseudo-onde ». Comme il a été expliqué antérieurement, en effet, cette pseudo-onde ne doit intervenir qu'en apparence, et ne donner lieu, tous calculs faits, à aucun phénomène particulier.

9. Les circonstances que nous venons de mentionner sont celles qui se présentaient dans nos Mémoires antérieurs. Mais dans nos hypothèses actuelles, des circonstances nouvelles vont apparaître, conformément aux résultats obtenus dans A_2. Lorsque le point 2 appartiendra à une caustique de l'onde, les deux traces auront entre elles un contact du second ordre ([2]).

Il résulte également de A_2 que la surface S_2 (du moins lorsqu'elle commence à s'écarter de S_1, *voir* plus loin n° 10) ne peut pas rencontrer la caustique sans rencontrer également une ligne double de la caractéristique Γ_0. Il y a lieu de reprendre ici la discussion des relations de contact entre les deux traces en faisant varier le point 2 non plus le long d'une bicaractéristique, mais le long de la section τ de l'onde par la surface S_2, laquelle comporte (au moins) un point double et deux points de rebroussement. Cette section étant repré-

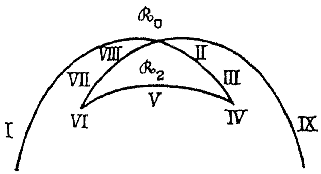
([1]) Ceci reste valable même lorsqu'on abandonne l'hypothèse γ (quoique, dans certains cas de figure, tels que ceux qui sont représentés sous les nos IV-VI sur la figure 3, les deux aires découpées dans S_1 par Γ_0 et par Γ_2 pénètrent l'une dans l'autre au voisinage du point de contact), en ce sens que, sur une ligne menée par ce point et non tangente aux traces, les deux segments respectivement intérieurs aux aires en question n'ont d'autre point commun que leur extrémité.

Au contraire, si le point 2 était sur la pseudo-onde, les deux segments dont il s'agit seraient de même sens et se recouvriraient.

([2]) Si S_2 passait par un point de rebroussement de la caustique (*cf.* A_2, 3), les deux traces correspondantes auraient un contact du troisième ordre. Cette disposition étant exceptionnelle, nous ne jugeons pas utile d'en entreprendre l'étude.

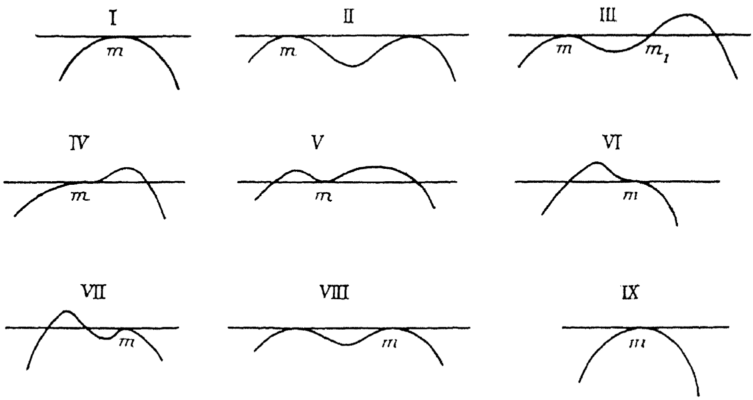
sentée figure 2, nous avons représenté schématiquement, figure 3, les formes successives de la courbe γ_2, trace de Γ_2, la trace de Γ_0

Fig. 2.



étant figurée ([1]) par l'axe des x. Sur un premier arc décrit par le point 2, ce point étant, par exemple, en I (*fig.* 3), les deux traces tangentes sont dans la position relative normale, c'est-à-dire celle

Fig. 3.



qu'on rencontrerait seule s'il n'y avait pas de caustique. La première particularité qui se présente est nécessairement,

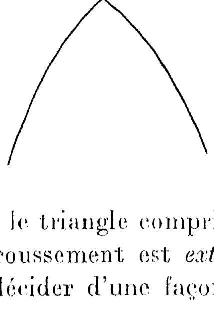
([1]) Les figures successives I à IX doivent être en réalité envisagées comme décalées les unes par rapport aux autres, le point m se déplaçant continûment (de gauche à droite dans la disposition adoptée dans nos dessins).

([2]) Il se peut (*cf.* 10) que de tels points I n'existent pas, aucune position du point 2 sur la courbe de la section τ ne donnant lieu à des traces complètement extérieures l'une à l'autre. Mais cette circonstance ne peut pas se présenter lorsque S_2 s'écartant progressivement de S_1 commence à rencontrer la caustique.

nous l'avons constaté dans A_2. la présence d'un second point de contact (cas II, *fig.* 3) : ceci correspond au premier passage du point mobile 2 par le point double II de la section. Puis (position III du point mobile), la trace γ_2, toujours tangente extérieurement en un premier point de contact m, pénètre par ailleurs dans la région intérieure $y > 0$. On arrive ainsi à un point de rebroussement IV de la section, l'osculation des deux traces étant atteinte par le fait que le premier point d'intersection m_1 de ces deux lignes dans le cas III vient coïncider avec m, pendant que la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ en m, primitivement négative, augmente jusqu'à la valeur zéro. Cette dérivée seconde devenant ensuite positive, la disposition devient celle du cas V, c'est-à-dire que la seconde trace γ_2 a deux régions différentes communes avec la première. Les déformations se succèdent ensuite dans l'ordre inverse. Le point d'intersection le plus à droite des deux traces venant à son tour coïncider avec m, on a une nouvelle osculation, correspondant au second point de rebroussement VI; puis, à nouveau, pour toute position telle que VII, une seule aire intérieure commune aux deux traces; puis, nouveau passage VIII par le point double (de sorte que la figure VIII n'est autre que la figure II, à la dénomination près du point m) après quoi on retrouve, en IX, la position normale.

Il est à remarquer que la courbe de section que nous avons tracée figure 2 ($\mathcal{R}_0$, région extérieure) aurait pu aussi, semble-t-il, être conçue avec la disposition représentée figure 2 *bis*, différant de la

Fig. 2 *bis*.



première par le fait que le triangle compris entre le point double et les deux points de rebroussement est *extérieur*. Mais la discussion précédente permet de décider d'une façon certaine entre ces deux

hypothèses et d'éliminer la seconde d'entre elles. Dans cette dernière, en effet, il y aurait, au voisinage des points de rebroussement, des points entièrement extérieurs à l'onde : pour de telles positions du point 2, les deux traces seraient entièrement extérieures l'une à l'autre. Or, c'est ce qui ne peut se produire au voisinage des points IV ou VI, en vertu de la forme des figures IV et VI qui correspondent à ces points. Au contraire, les figures en question montrent qu'il existera, sur S_2, des points — en l'espèce ceux qui sont compris dans le triangle $\mathcal{R}_2$ (*fig.* 2) délimité ainsi entre trois arcs de la courbe τ — « doublement intérieurs » à l'onde, c'est-à-dire tels que la trace du conoïde direct ayant pour sommet l'un d'eux ait deux régions différentes intérieures à γ_0.

10. Tous ces détails peuvent être aisément vérifiés sur l'exemple des ondes cylindriques ordinaires, c'est-à-dire sur les modèles en fils de surfaces à pente constante ou, ce qui revient au même, sur les figures de courbes parallèles à une courbe fixe. Nous figurons un peu plus loin (*fig.* 5) la disposition correspondant à une onde dont le front, à l'instant I [1] coïncide avec une ellipse de demi-axes a, b et qui — comme il est nécessaire pour trouver une caustique — se propage, lorsqu'on fait décroître le temps t, vers l'intérieur de la courbe, de sorte que la région du plan S_1 qualifiée d'intérieure à l'onde sera la région extérieure à l'ellipse.

S_2 sera également un plan $t = \text{const.}$, de sorte que la section de l'onde par S_2 s'obtiendra en portant, à partir du pied de chaque normale à l'ellipse, une longueur constante L dans le sens intérieur. Conformément à ce qui a été dit au n° 7 nous serons conduit à faire passer non seulement par les points situés sur l'ellipse, mais par les points extérieurs, c'est-à-dire intérieurs à notre onde, des géodésiques — c'est-à-dire des droites — $\mathfrak{C}$ projetées, par exemple, sur les plans $t = \text{const.}$ suivant les normales à l'ellipse. Si, comme il a été admis au n° 7, nous supposons encore ces géodésiques de longueur nulle, c'est-à-dire de même pente que celles qui sont issues des points de la courbe, nous voyons que la correspondance entre les régions intérieures à l'onde situées sur S_1 et sur S_2 se fera, en projection sur $t = \text{const.}$, par segments de longueur constante L portés sur les normales à l'ellipse. Cette correspondance sera univoque à partir de S_1 (la normale qui sert à la réaliser étant, de convention expresse, la plus courte, celle qui ne passe pas à l'intérieur de l'ellipse entre son point de départ et son pied); mais elle ne le sera pas à partir de S_2, dès que L dépassera le rayon de courbure minimum de l'ellipse $\left(\text{rayon de courbure au sommet du grand axe, soit } \frac{b^2}{a}\right)$: à partir de ce moment, l'aire triangulaire $\mathcal{R}_2$ prendra naissance et

[1] Sous le point de vue auquel nous nous plaçons, comme dans tout ce qui précède, il s'agit d'une propagation rétrograde, c'est-à-dire vers le passé.

tout point situé à l'intérieur de cette aire ([1]) aura, dans S_1, deux homologues différents. La trace γ_2 correspondant à un tel point, c'est-à-dire le cercle de rayon L ayant ce point pour centre, coupera la conique en quatre points de manière à déterminer, extérieurement à elle, deux aires distinctes.

Ajoutons que les choses se passent d'une manière un peu différente, si l'on fait encore croître la constante L. Pour des valeurs suffisamment grandes de cette quantité le point double de la courbe de section disparaît, la région extérieure que nous avons précédemment dénommée $\mathcal{R}_0$ cessant d'exister : autrement dit, aucun point 2 n'est centre d'un cercle de rayon L entièrement intérieur à l'ellipse (c'est-à-dire extérieur à l'onde). C'est ce qui se produit évidemment à partir du moment où L dépasse le demi-petit axe ([2]). Dans ce cas, S_2 peut rencontrer la caustique sans rencontrer de ligne double de la surface.

11. C'est sous le bénéfice de ces données géométriques que nous allons reprendre (cf. *J. M.*) l'étude d'une intégrale telle que

(9) $$I =$$

et de sa différentiation par rapport à ν. Je me propose même de reprendre cette étude dès le commencement, c'est-à-dire tout d'abord, comme dans *J. M.*, en l'absence de caustiques : la méthode de calcul employée dans *J. M.* peut en effet être notablement simplifiée et, pour le cas primitivement traité où les caustiques n'interviennent pas, les résultats deviennent à peu près intuitifs moyennant une simple interversion de l'ordre des intégrations, la première d'entre elles ayant lieu par rapport à la variable que nous avons appelée y.

Rappelons que nous avons, dans *J. M.*, appelé *fonction-unité*

([1]) La même propriété appartiendra d'ailleurs $\left(\text{toujours pour } L < \frac{b^2}{a}\right)$ à d'autres points de la figure. En fait, la forme de la « surface de Riemann » qui correspond à S_1 de par la transformation considérée est facile à indiquer immédiatement, car elle n'est autre que celle de la surface d'onde Γ_0 elle-même (convenablement arrêtée à la courbe de section τ, puisque S_1 est arrêtée à l'ellipse). Cette surface affecte donc au voisinage du point de rebroussement de la caustique, la forme décrite dans A_2 (n° 6) : elle recouvre trois fois le triangle $\mathfrak{T}$ compris entre les deux branches de la développée et l'arc IV-VI de la courbe de section, deux fois la région $\mathcal{R}_2$. Mais nous n'avons à tenir compte, en ce moment, que du cas où deux images, sur S_1, d'un même point de S_2 sont près de se confondre, et ce cas est celui que nous considérons dans le texte.

([2]) Pour $L = b$, la courbe de section τ présente un auto-contact, au centre de l'ellipse.

toute fonction régulière non nulle au voisinage de laquelle nous nous plaçons, de sorte que toute puissance positive ou négative, entière ou fractionnaire d'une telle unité est encore une unité. Ajoutons que de telles fonctions-unités, lorsqu'elles figurent comme coefficients dans l'équation d'une courbe, se comportent, au point de vue de la forme de celle-ci, comme des constantes. Les courbes

$$ay + bx^2 = 0, \qquad ay + \qquad\qquad ay^2 + bx^3 = 0,$$

où a, b, fonctions de x et de y, sont des unités, ont sensiblement au voisinage de l'origine, la première la forme d'une parabole; la seconde, celle d'une parabole cubique; la troisième, celle d'une parabole semi-cubique; etc.

11 *bis*. Dans *J. M.*, nous avons été conduit à écrire les équations de nos deux traces, au moins lorsqu'elles sont tangentes ou près d'être tangentes, sous la forme ([1])

$$(10) \qquad y = 0, \qquad y = Y(x)$$

et, par conséquent, par un usage convenable des facteurs-unités, l'intégrale (9) sous la forme

$$\iint \frac{f(x, y)\, dx\, dy}{\sqrt{\pm y(y - Y)}},$$

la fonction f contenant, indépendamment de x, y et la fonction Y, indépendamment de x, les paramètres ν, ν_2 et les coordonnées du point 2 sur la surface S_2 ou S'_2. Au voisinage du contact extérieur, c'est-à-dire lorsque le point 2 sera voisin de l'onde incidente tout en lui étant intérieur, le signe à prendre sous le radical, dans la formule (q') sera — et l'aire d'intégration sera définie par

x variant lui-même dans un intervalle (x', x'') dont les extrémités ont pour abscisses deux racines de l'équation $Y(x) = 0$. Or, on peut écrire

$$(11) \qquad f(x, y) = f(x, 0) + y f_1(x, y) = f_0(x) + y f_1(x, y).$$

([1]) La notation Y n'a pas le même sens que dans *J.M.*

f_1 étant elle-même une fonction régulière, donc bornée ainsi que les différentes dérivées que nous aurons à en considérer. Réduisant d'abord cette expression de f à son premier terme, nous voyons immédiatement que la quadrature par rapport à y donne le résultat $\pi f_0(x)$ et, par conséquent, la quadrature double, le résultat

$$\pi \int_{x'}^{x''} f_0(x)\, dx.$$

Si la fonction f_0 contient les paramètres (principalement le paramètre ν) par rapport auxquels on veut différentier, la dérivée correspondante sera, par hypothèse, elle-même régulière et son intégrale dans l'intervalle (x', x'') restera bornée, ou sera même infiniment petite avec l'amplitude de l'intégrale. Nous n'aurons donc à considérer que les termes aux limites

$$(12)\qquad \pi\left[f_0(x'')\frac{dx''}{d\nu} - f_0(x')\frac{dx'}{d\nu}\right]$$

et nous voyons que *la dérivée* $\frac{dI}{d\nu}$ *ne pourra devenir infinie que* (au plus) *de l'ordre des dérivées*

$$(13)\qquad \frac{dx'}{d\nu} \quad \frac{dx''}{d\nu}$$

Quant au second terme de l'expression (11), en vertu de la formule

$$\int_0^{Y} \sqrt{\frac{y}{Y-y}}\, dy = \frac{\pi}{2} Y,$$

sa différentiation n'introduira aucun terme aux limites analogue à (12) et (puisque les quantités sous les signes d'intégration sont supposées régulières) donnera un résultat nécessairement borné, dont nous n'aurons pas à nous occuper. On voit d'ailleurs qu'il en serait encore de même si l'on soumettait la portion correspondante d'intégrale à un nombre quelconque de différentiations successives.

12. Ceci s'applique encore lorsque les deux traces qui limitent l'aire d'intégration sont franchement sécantes, c'est-à-dire sécantes sans être au voisinage du contact. On peut alors, moyennant une

transformation ponctuelle qui ne change pas l'axe des x, mettre leurs équations sous la forme (10) et, d'autre part, les deux dérivées (12) seront finies. Un calcul très analogue s'applique d'ailleurs aux cas où l'une des traces est entièrement et « franchement » intérieure à l'autre et limite seule l'aire d'intégration, de sorte que l'on a ainsi, sous forme manifestement bornée, la dérivée, par rapport à ν ou à tout autre paramètre, d'une intégrale du type (9) toutes les fois que le point 2 est franchement intérieur à l'aire utile S_2.

13. On pourrait appliquer une marche analogue au cas du contact intérieur, qui correspond, comme nous l'avons dit, à celui où le point 2 est sur la pseudo-onde, cas dont nous savons d'ailleurs,

Fig. 4.

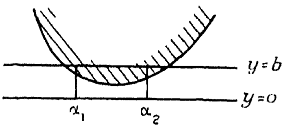
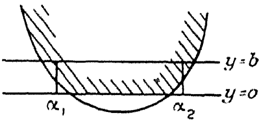


Fig. 4 *bis*.



a priori, qu'il ne donne lieu à aucune singularité. Au voisinage d'un tel contact intérieur, les deux traces peuvent être considérées comme ayant l'une des deux dispositions relatives représentées figure 4 ou figure 4 *bis*, l'aire d'intégration étant du côté ombré sur l'une ou l'autre de ces figures et le signe à prendre sous le radical, dans la formule (9'), étant $+$. Comme dans *J. M.*, nous limiterons l'aire par une parallèle $y = b > 0$ à l'axe des x, toute la partie située au delà de cette parallèle donnant un résultat régulier, et par deux parallèles $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ à l'axe des y situées de part et d'autre du point de contact. L'ordonnée b et les abscisses α_1, α_2 étant supposées constantes, toute la partie de l'aire d'intégration extérieure au rectangle ainsi délimité donnera un résultat régulier. D'autre part, puisque la courbe $y = \text{Y}(x)$ est supposée passer au point considéré p pour les valeurs initiales des paramètres dont elle dépend, les deux côtés $x = \alpha_1$, $x = \alpha_2$ parallèles à l'axe des y auront pu être choisis assez voisins du point p pour que les ordonnées correspondantes de la courbe soient inférieures à b, le côté du rectangle qui appartient à la droite $y = b$ étant, par conséquent, entièrement compris dans l'aire d'intégration, et cela pour toutes les valeurs des paramètres

suffisamment voisines des valeurs initiales. La primitive de $\frac{1}{\sqrt{y(y-Y)}}$ étant

$$2\log\left[\sqrt{\pm y}+\sqrt{\pm(y-Y)}\right],$$

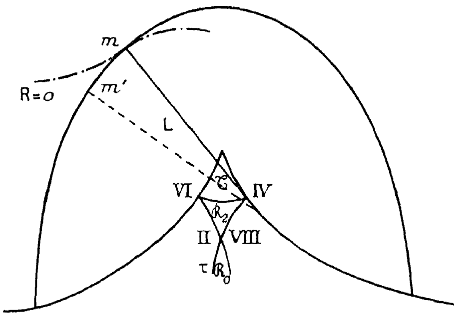
le résultat de l'intégration correspondante effectuée entre la limite supérieure b et une limite inférieure égale à la plus grande des deux quantités o, Y est, en toute hypothèse,

$$2\log\left(\sqrt{b}+\sqrt{b-Y}\right)-\log|Y|.$$

Cette quantité doit être multipliée par $f_0(x)\,dx$ et intégrée de α_1 à α_2. Le premier terme, différentié ou non par rapport aux paramètres, ne donne lieu à aucune singularité, de sorte que toute la question porte sur la différentiation de l'intégrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1}\log|Y(x)|\,dx.$$

Le calcul étant ainsi dirigé, on voit qu'il s'appliquerait, non seulement aux deux dispositions des figures 4 et 4 *bis*, mais aussi (cf. *J. M.*, 9) aux deux dispositions représentées figures 4 et 5 de *J. M.*



On peut toujours [1] supposer qu'on est dans l'un des deux premiers cas; mais on voit que cette remarque est en somme inutile.

[1] Dans le calcul qui nous intéresse, l'une des quantités ρ_{01}, ρ_{12} (tantôt l'une, tantôt l'autre) dépend des seules coordonnées du point 1, pendant que l'autre dépend également des paramètres. D'autre part, les dispositions des figures 4, 4 *bis*, correspondent

Nous n'insisterons pas ici d'ailleurs sur ce cas du contact intérieur, la méthode actuelle n'offrant pas alors, sur celle qui a été suivie dans *J. M.* (8, 9), le même avantage que tout à l'heure.

14. Les systèmes de coordonnées que nous adopterons sur S_1, S'_1, S'_2 (le cas de S'_2 étant, comme nous le verrons, hors de question) ne seront pas exactement ceux qui nous ont servi dans *J. M.* Le premier d'entre eux (*J. M.*, 11) sera toutefois conservé : nous supposerons donc que, par tout point situé sur S_1 ou voisin de S_1, on mène une géodésique transversale à S_1 jusqu'à la rencontre avec la caractéristique Γ_0 : ce sera la longueur de l'arc géodésique ainsi délimité, mesurée avec la métrique H, et prise positivement lorsque cet arc est intérieur à l'onde qui sera la coordonnée y, de sorte que les valeurs de cette coordonnée en deux points correspondants (c'est-à-dire projections transversales l'un de l'autre) pris sur S_1 et sur S'_1 diffèrent entre elles purement et simplement de la quantité constante ν. Nous donnerons d'autre part, à deux pareils points correspondants, la même coordonnée x. Celle-ci pourra, à cela près, être définie arbitrairement.

Pour les paramètres ξ, η introduits aux n^{os} 5, 6 et qui, dans le cas d'une onde rétrograde incidente émanée d'un point fixe o, définissent une géodésique issue de ce point, nous pourrons prendre les coordonnées x, y du point en lequel cette géodésique (ou, dans le cas du n^o 7, la ligne $\mathfrak{L}$ de la congruence considérée) rencontre S_1 [de sorte que le premier membre de (7) se réduira à η]. Ces mêmes quantités ξ η, serviront de coordonnées sur S_2, d'après la méthode du n^o 7. Il est bien entendu que la correspondance entre ce système de coordonnées et la position d'un point de S_2 n'est pas nécessairement biunivoque. Elle l'est dans le cas qui a fait l'objet de *J. M.*; elle ne le sera plus si nous admettons l'intervention des caustiques. Nous pourrons toujours exprimer, en fonction de ξ, η, des coordon-

au cas où celle des deux aires $\rho_{01} \leqq 0$, $\rho_{12} \leqq 0$ qui est ramenée $y = 0$ est celle qui comprend l'autre entièrement ou presque entièrement à son intérieur. Ce résultat ne peut pas toujours être obtenu par une transformation ponctuelle fixe. Mais il n'y a aucun inconvénient, pour le calcul, à introduire une transformation ponctuelle dépendant du paramètre, pourvu que cette dépendance soit régulière.

nées curvilignes λ_1, λ_2 choisies sur S_2 et aptes à représenter cette surface d'une manière régulière; mais, dans le cas des caustiques, le déterminant fonctionnel de ces expressions sera susceptible de s'annuler et, avec lui, le facteur K_2 qui figure dans l'expression de l'élément superficiel

$$dS_2 = K_2\, d\xi\, d\eta \tag{6 bis}$$

de la surface.

C'est, en particulier, ce qui aura lieu aux points de rebroussement de la courbe de section τ, numérotés IV et VI sur la figure 3, puisque le courbe représentée sur cette figure correspond, de par la correspondance dont il s'agit, à la trace Γ_0 sur S_1, trace qui est dépourvue de singularité.

15. La méthode indiquée au n° 11 *bis* amène, nous l'avons dit, à une forme très simple l'évaluation de l'intégrale (9) et de sa dérivée pour le cas traité dans *J. M.*, celui où il n'y a pas de caustique et où, par conséquent, pour chaque position du point 2 sur la courbe de section τ, les deux traces sont tangentes au premier ordre seulement. Le point de contact ayant une abscisse x précisément égale, dans nos notations, à la coordonnée ξ qui définit la position du point 2 sur τ, la quantité Y qui représente l'ordonnée d'une de ces traces (l'autre ordonnée étant nulle) sera (pour un contact extérieur) de la forme

$$Y = -A(x-\xi)^2, \tag{13}$$

le coefficient A, fonction régulière de x, étant positif et non nul — donc ce que nous avons appelé une unité — pour x voisin de ξ.

Si, à partir de la position que nous venons de considérer, on donne au point 2 un petit déplacement quelconque, la nouvelle expression de l'ordonnée Y deviendra

$$Y = -A(x-\xi)^2 + A_1(x-\xi) + A_0 = -A(x-\xi)^2 + b_1\eta(x-\xi) + b_0\eta, \tag{14}$$

le coefficient A ayant, en général, changé de valeur et les coefficients A_1, A_0 étant également fonctions de ξ, η, mais contenant nécessairement η en facteur, puisque, pour toute valeur de ξ, Y a, lorsque η est nul, la forme (13).

15 *bis*. Dans le cas que nous considérons actuellement, le coefficient b_0 de η dans la formule (14), c'est-à-dire la dérivée $\frac{\partial Y}{\partial \eta}$ pour $x = \xi$, $\eta = 0$, est nécessairement positif. En effet, une valeur positive très petite de η correspond à un point 2 intérieur à notre aire S_2, auquel correspond une trace γ_2, qui passe à l'intérieur de γ_0, de sorte que le coefficient en question ne peut être négatif; il ne peut non plus être nul, c'est-à-dire que la trace γ_2 du nouveau conoïde de sommet 2 ne pourra pas contenir un point ayant avec notre point $(\xi, 0)$ une distance infiniment petite du second ordre (par rapport à η pris comme infiniment petit principal, ξ restant invariable) : c'est ce que nous avons vu au n° 3.

16. Voyons maintenant comment l'expression (14) sera modifiée lorsque nous ferons varier ν, c'est-à-dire lorsque nous couperons les caractéristiques Γ_0 et Γ_2 non plus par la surface S_1, mais par la surface S'_1 à distance transversale constante de la première. Dans le système de coordonnées x, y adopté, la nouvelle trace de l'onde incidente Γ_0 aura encore pour équation $y = 0$ (et, en projection sur S_1, $y = \nu$). Celle du conoïde Γ_2 sera tangente à la première au point $x = \xi$, $y = 0$ et aura, par conséquent, une équation de forme analogue à (13). Pour η différent de zéro, elle sera complétée, comme tout à l'heure, par des termes de η, soit

$$(14') \qquad \overline{Y} = -\overline{A}(x - \xi)^2 + \overline{b}_1 \eta (x - \xi) + \overline{b}_0 \eta$$

et, en projection transversale sur S_1, par le terme additif ν.

Les nouveaux coefficients b_1, $\overline{b}_0$ (ce dernier positif) sont, aux facteurs numériques près, ceux de la formule de Taylor : ils contiennent (en général) η, ν, mais non x, qui y est remplacé par la valeur ξ. Au contraire, le coefficient $\overline{A}$ contient en général (régulièrement) x. Par contre, puisque nous continuons à admettre l'hypothèse γ, ce coefficient est une unité, qui admettra même une borne inférieure positive pour toutes les positions du point 2 le long de la ligne ν et dans le voisinage de cette ligne.

Comme nous l'avons vu dans *J. M.* (13), les deux traces sur S'_1 ne sont pas à combiner entre elles, mais avec les traces primitives, après projection transversale sur S_1. Dans le calcul du terme *(aa)*

interviendra l'intégrale

$$\overline{I}_{02} = \int\int \varphi_{01}\varphi_{1'2}\, dS_1 = \int\int \frac{f(x, y)\, dx\, dy}{\sqrt{y(\overline{Y} + \nu - y)}} \tag{15}$$

étendue à l'aire comprise entre les lignes

$$y = 0, \qquad y = \overline{Y} + \nu;$$

pour le terme (ba), l'intégrale

$$\underline{I}_{02} = \int\int \varphi_{01'}\varphi_{12}\, dS_1 = \int\int \frac{\overline{f}(x, y)\, dx\, dy}{\sqrt{(y - \nu)(Y - y)}}$$

étendue à l'aire comprise entre les lignes

17. D'après ce qui a été établi au n° 11, *les dérivées des intégrales* (15), (15') *par rapport à* ν, *sont du même ordre de grandeur que celles des abscisses des points communs aux courbes* (16) *ou aux courbes* (16'), c'est-à-dire des racines de chacune des équations

$$\begin{aligned} \overline{Y} + \nu &= -\overline{\Lambda}(x - \xi)^2 + \overline{b}_1\eta(x - \xi) + \overline{b}_0\eta + \nu = 0, \\ Y - \nu &= -\Lambda(x - \xi)^2 + b_1\eta(x - \xi) + b_0\eta - \nu = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Pour différentier les fonctions implicites ainsi définies, on dispose de deux méthodes classiques :

Ou bien appliquer le théorème des fonctions implicites, soit, pour l'équation (17) par exemple,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\nu} &= \frac{1 + \dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial \nu}}{2\overline{\Lambda}(x - \xi) - (x - \xi)^2 \dfrac{\partial \overline{\Lambda}}{\partial x} + \overline{b}_1\eta} \\ &= \frac{1 + \dfrac{\partial \overline{Y}}{\partial \nu}}{(x - \xi)\left[2\overline{\Lambda} - (x - \xi)\dfrac{\partial \overline{\Lambda}}{\partial x}\right] + \overline{b}_1\eta}; \end{aligned} \tag{18}$$

Ou bien imaginer que l'on forme, si l'on peut, l'expression explicite de x.

C'est, en réalité, la seconde de ces deux méthodes que nous emploie-

rons. Mais la première va nous permettre de simplifier le calcul et de le rendre possible ([1])

Les premiers membres des équations (17), (17′) et, par conséquent, les racines que nous avons à étudier, dépendent en effet de ν de deux manières, à savoir par la présence du terme explicite $\pm\nu$ et par l'intervention du paramètre ν dans les divers coefficients. Au numérateur de (18), cette deuxième dépendance se traduit par des termes tous infiniment petits : en les négligeant, on n'altérera donc point sensiblement la dérivée cherchée.

Le dénominateur de (18) ne fait entrer la variabilité des coefficients en fonction de ν, x, que par l'intermédiaire du terme en $\frac{\partial\overline{A}}{\partial x}$. Ce dernier terme, à son tour, en raison de la présence du facteur $(x-\xi)$, est infiniment petit vis-à-vis de la quantité $\overline{A}$, que nous savons être bornée inférieurement.

Ainsi, dans la différentiation qui nous intéresse, nous pouvons traiter tous les coefficients A, $\overline{b}$ comme des constantes, en commettant simplement ainsi sur le résultat une erreur relative infiniment petite, sous la condition de faire subir une altération convenable, elle aussi infiniment petite, au coefficient $\overline{A}$. Les évaluations que nous nous proposons d'obtenir pour la dérivée n'en seront pas affectées si elles ne font intervenir que la borne inférieure de $\overline{A}$.

Or, la résolution de l'équation du second degré (17) donne

[illegible]

et, en dérivant par rapport à ν et faisant $\nu = 0$, on trouve immédiatement un résultat de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt{\eta}}$, ce qui est bien le résultat que nous devions attendre [puisque la somme algébrique des dérivées que nous venons d'évaluer ([2]) doit fournir, à un terme

([1]) L'emploi du théorème de factorisation permettrait de surmonter la même difficulté (*voir*, plus loin, n° 19).

([2]) Les infinis qui interviennent dans les deux premiers termes sous le signe $\int\int$ de (19) s'ajoutent.

Le contraire a lieu au niveau de la pseudo-onde, par un mécanisme semblable à celui qui intervenait dans notre travail des *Acta Mathematica*, t. 49, n° 21, p. 243.

borné près, la valeur de v_{02}] et qui suffit à justifier, comme nous l'avons vu dans *J. M.*, les transformations effectuées dans ce Mémoire et à établir la formule

$$(19) \qquad v_{02} = \qquad\qquad {}_2 = \int\int_{S_1} \ldots$$

18. Abandonnons maintenant l'hypothèse γ et admettons par conséquent que la courbe de section τ présente un ou plusieurs points de rebroussement, intersections de S_2 avec une caustique. Les propriétés géométriques de la figure seront alors celles qui ont été décrites au n° 9. Nous continuerons d'ailleurs à rapporter les points de S_2 aux coordonnées ξ, η considérées au n° 14; seulement celles-ci n'auront plus, avec les points qu'elles représentent, une correspondance parfaitement biunivoque : un point de S_2 pourra avoir, suivant les cas, soit un, soit plusieurs systèmes de coordonnées.

Cette circonstance ne change d'ailleurs, en général, rien d'essentiel aux calculs précédents ou aux considérations de *J. M.* Les points 2 qui auront deux systèmes de coordonnées ξ, η seront les sommets de conoïdes interceptant à leur intérieur, sur S_1, des régions ayant en commun avec celle qui est intérieure à l'onde incidente, deux aires distinctes : une intégrale telle que $\overline{I}_{02}$, $\underline{I}_{02}$ ou $\mathcal{I}_{02}$ devra alors être étendue successivement à ces deux aires; sa différentiation fera intervenir non plus deux, mais quatre quantités de la forme (13); mais celles-ci continueront à relever de l'étude précédente.

Les seuls points qui exigent une étude nouvelle sont les points de rebroussement. Nous considérerons, par exemple, le point IV de la figure 2, qui pourra évidemment être supposé correspondre à l'origine des coordonnées dans le plan des $\xi\eta$, pendant que le point m correspondant sera l'origine des coordonnées sur S_1. Nous limiterons l'aire d'intégration, sur S_1, à sa portion intérieure à un petit rectangle fixe ayant pour base, sur l'axe des x, un segment (ξ_1, ξ_2) pris autour de l'origine.

La formule de Taylor utilisée pour représenter l'ordonnée Y devra, pour ξ voisin de zéro, comporter un terme de plus, soit

$$(20) \qquad Y = H(x-\xi)^3 + A(x-\xi)^2,$$

x ne figurant plus, cette fois, dans le coefficient A, mais dans le coefficient H. Ce dernier sera différent de zéro même pour $\xi = 0$, sans quoi (A_2, 3) le point IV considéré serait un point de rebroussement de la caustique, et nous excluons le cas où S_2 passerait par un tel point de rebroussement. Si nous avons pris comme sens positif, sur l'axe des x, le sens de gauche à droite sur la figure 3, le coefficient en question sera positif pour toutes les valeurs de ξ qui nous intéressent actuellement.

Le coefficient A (courbure au point de contact) s'annulera au contraire, pour $\xi = 0$. Ce zéro, par rapport à la variable indépendante ξ, est simple (¹), en vertu de ce qui a été dit au n° 2. Nous écrirons donc

le nouveau coefficient a étant une unité et étant d'ailleurs positif, puisque d'après les figures III-V (*fig.* 3), la concavité de la ligne γ_2 passe du côté négatif au côté positif de l'axe des x lorsque ξ passe par la valeur zéro en croissant.

Conformément à ce qui a été dit au n° 1, l'équation qui vient d'être écrite conserve sa forme, non seulement pour $\nu = 0$, mais (²) lorsqu'on fait varier ν.

Pour η différent de zéro, mais ν nul, la valeur de Y s'écrira

$$(20') \quad Y = H(x-\xi)^3 + A(x-\xi)^2 + b_1\eta(x-\xi) + b_0\eta, \qquad A = A(\xi, \eta) = a\xi + b\eta.$$

Grâce aux remarques faites au n° 3, nous pouvons affirmer que le résultat du n° 15 *bis* subsiste dans les conditions actuelles, c'est-à-dire que *le coefficient b_0 est encore différent de zéro* et même positif.

Si enfin l'on fait également varier ν, on aura (en projection sur S_1 et avec modifications des divers coefficients), pour équation de la trace du conoïde Γ_2,

$$y = \overline{Y} = \overline{H}(x-\xi)^3 + \overline{A}(x-\xi)^2 + \overline{b}_1\eta(x \qquad \overline{b}_0\eta.$$
$$\overline{A} = \overline{A}(\xi, \eta, \nu) = \overline{a}\xi + \overline{b}\eta,$$

(¹) S_2, surface d'espace, n'est certainement pas tangente à la bicaractéristi

(²) Le zéro de la fonction $A(\xi)$ serait, au contraire, variable avec ν_2.

de sorte que les deux équations en x seront

(21) $\overline{Y} + \nu = \overline{H}(x-\xi)^3 + \overline{A}(x-\xi)^2 + \overline{b}_1\eta(x-$

(21′) $Y - \nu = H(x-\xi)^3 + A(x-\xi)^2 + b_1\eta(x-$ $\qquad - \nu = 0.$

Dans ces deux équations, on peut simplifier l'expression des coefficients A, $\overline{A}$ de $(x-\xi)^2$ par un changement de variable de la forme

(22) $\qquad , \eta)$

qui laisse fixes les points de l'axe des ξ. Il est clair, en effet, qu'on peut choisir un tel changement de variable de manière à réduire A à $a\zeta$ et $\overline{A}$ à $\overline{a}\xi$. Dans le second cas, les coefficients du changement de variable dépendent de ν; mais, cette dépendance étant régulière, elle n'apporte pas d'obstacle aux calculs qui vont suivre.

19. Les divers coefficients des équations (21), (21′) sont encore des fonctions de ξ, η, de ν (pour la première d'entre elles) et — pour $\overline{H}$, H — de x. Mais, comme au n° 17, nous pouvons, dans le calcul de $\frac{dx}{d\nu}$, faire abstraction de cette dépendance et considérer les H, A, B, b comme des constantes.

Toutefois, en vue de la suite que nous aurons à donner à ce calcul aux n^os 20, 22, il est préférable de ne pas user de cette faculté en ce qui regarde la dépendance de H (ou de $\overline{H}$) par rapport à x et d'appliquer, relativement à cette dernière variable, le théorème de factorisation. Donc, dans l'équation (21′), nous remplacerons H par son développement suivant les puissances de $(x-\xi)$, soit

$$H + H'(x \qquad + H''(x-\xi$$

où cette fois, H, H′, H″, ... sont indépendants de x et, opérant suivant la méthode de M. Goursat ([1]), nous mettrons le premier membre de (21′) sous forme du produit d'un facteur unité par le polynome

$$H(x)\ldots(x-\xi)^3 + U_2(x-\xi)^2 + U_1(x-\xi) + U_0$$

([1]) *Bull. Soc. math. franç.*, t. XXXVI, 1908, p. 209. Nous sommes revenus sur ce sujet dans le même recueil, t. XLVII, 1919 (Comptes rendus des séances, p. 44).

les quantités U_1, U_2, U_3 étant déterminées par les équations

$$b_0\eta - \nu - HU_0 - H'U_0U_2 - H''U_0(U_2^2 - U_1) - \ldots = 0,$$
$$b_1\eta - HU_1 - H'(U_0 - U_1U_2) + H''(U_0U_2 + U_1^2 - U_1U_2^2) + \ldots = 0,$$
$$[illegible] - H''(U_0 - 2U_1U_2 + U_2^3) - \ldots = 0.$$

L'examen des termes du premier ordre de ces équations montre que U_0, U_1, U_2 peuvent s'écrire

(23) U_0 [illegible] H [illegible] H'' [illegible] H' [illegible]

où, toutefois dans la forme donnée à U_2, on suppose encore effectuée une transformation convenable du type (22). Les termes remplacés par des points sont d'ordre supérieur; et il est encore à noter que ceux qui figurent dans U_0 contiennent tous en facteur celui qui est explicitement écrit.

Nous traiterons l'équation $H(x) = 0$ à la manière classique, en faisant d'abord disparaître le terme du second degré par le changement d'inconnue

[illegible]

La nouvelle équation sera

[illegible]

avec

(25) [illegible]

U_1U [illegible] $\frac{[illegible]}{27} = c_0\eta - h_0$ [illegible] $+ h_n\nu$ [illegible]

(25′) [illegible]

(le terme en U_1U_2 pouvant être incorporé aux termes en η et en ν), de sorte que le discriminant

se réduit, pour $\nu = 0$, à

$$(26') \qquad \Delta'_0 = -\Delta_0 = -c_0\eta R, \qquad R = 27c_0\eta + \frac{4a^2\xi^3}{H^3} + \ldots.$$

Le calcul relatif à l'équation (21) différerait uniquement du précédent par le changement de signe de ν et le changement de H, A, b_1, b_0 en $\overline{H}$, $\overline{A}$, $\overline{b_1}$, $\overline{b_0}$.

L'équation admet trois racines réelles pour $\Delta > 0$ et une seule pour $\Delta > 0$.

Comme il fallait s'y attendre, la valeur initiale Δ_0 du discriminant, celle qui correspond à $\nu = 0$, renferme η en facteur. L'autre facteur, égalé à zéro, représente également, sur S_2, un lieu de points 2 tels que la trace γ_2 correspondante soit tangente à l'axe des x : autrement dit, il donne à nouveau (1) une partie de la courbe de section τ, qui, nous l'avons vu, a, dans le plan des $\xi\eta$, deux arcs images passant à l'origine. Le fait que ce second lieu ait avec le premier, à l'origine, un contact du second ordre ressort bien de l'interprétation que nous venons d'en donner. Prenons, par exemple, le cas, déjà considéré au n° 10, de la propagation d'ondes cylindriques ordinaires avec front initial suivant une courbe régulière quelconque telle qu'une ellipse, c'est-à-dire la transformation ponctuelle par segments de longueur constante L normaux à la courbe. Nous avons figuré (*fig.* 5) l'ellipse, sa développée, projection de la caustique, et sa transformée, c'est-à-dire la courbe τ. Au voisinage du point de rebroussement IV de cette dernière, c'est-à-dire du centre de courbure en un point m de l'ellipse où le rayon de courbure est L, une normale en un point m', distant de m d'un arc qui sera pris comme infiniment petit principal, passera à une distance du point IV qui sera infiniment petite du second ordre et, par conséquent, le segment intercepté sur cette normale par la courbe τ sera, en vertu des propriétés connues du point de rebroussement, un infiniment petit du troisième ordre : or, c'est ce segment qui est à reporter, avec un décalage égal à L, pour obtenir celui qui est compris entre l'ellipse, front initial, et la seconde courbe qui a même image qu'elle dans la figure S_2.

(1) La trace de pseudo-onde satisfait à la même condition, mais ne passe pas au voisinage de l'origine.

Le même fait apparaît à l'inspection de la figure 3 (figures partielles III et IV). Si, en effet, on tient compte de ce que Y est une fonction croissante de η, on voit que l'unique possibilité d'une trace γ_2 coupant l'axe des x en trois points voisins de l'origine se présente pour ξ voisin de zéro et négatif, $b_0\,\eta$ étant inférieur à la valeur de Y qui correspond à $\eta = 0$, laquelle est de l'ordre de ξ^3.

La région (voisine de l'origine) dans laquelle devra être situé le point (ξ, η) pour que les trois racines de l'équation cubique soient réelles est celle qui est comprise entre l'axe des x et la ligne infiniment voisine $R = 0$.

20. Pour ν voisin de zéro, mais différent de zéro, la ligne $\Delta = 0$ du plan des xy aura une forme infiniment peu différente de la précédente En tout cas, la forme de l'expression (26), où le coefficient de η^2 est essentiellement différent de zéro et négatif, montre que si l'on a tracé une parallèle à l'axe des x à une distance positive, suffisamment petite, mais choisie une fois pour toutes, β de cet axe et pris sur cette droite, également une fois pour toutes, un segment (ξ_1, ξ_2) suffisamment petit, la quantité Δ sera positive sur ce segment pour toutes les valeurs suffisamment petites de ν. Pour de telles valeurs de ν et pour toute valeur de ξ comprise entre ξ_1 et ξ_2, le nombre des racines de l'équation $\Delta = 0$ voisines de zéro pourra être de zéro ou de deux; mais β sera toujours supérieur à la plus grande d'entre elles.

La forme de la ligne $\Delta = 0$ dépend de la situation relative des deux lignes $P = 0$, $Q = 0$, dont la première (*cf.* 11) est sensiblement une parabole (du moins si c_1 n'est

Fig. 6.

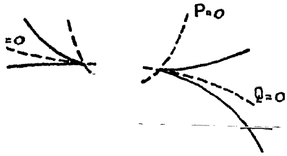


Fig. 6 *bis*.



pas nul) et dont la seconde peut, au point de vue de son intersection avec la première, être assimilée à une parallèle à l'axe des ξ, savoir $\eta = \frac{h_0 \nu}{c_0}$. Ces deux lignes se coupent ou non au voisinage de l'origine (pour les petites valeurs de ν) suivant les signes comparés de ν et du coefficient $k = \frac{c_1 h_0}{c_0} + h_1$. Dans le premier cas, les deux points

d'intersection seront, d'après la forme de l'expression (26), des points de rebroussement de la ligne en question (*fig.* 6). Il résulte de ce qui précède que, pour ρ tendant vers zéro, l'une des deux branches aboutissant à un tel rebroussement tendra vers un segment de l'axe des ξ et l'autre vers un arc de la courbe $R = 0$.

Si, au contraire, les deux courbes $P = 0$, $Q = 0$ sont sans point commun dans la région considérée, la ligne $\Delta = 0$ comprend (*fig.* 6 *bis*) deux branches entièrement séparées, de part et d'autre de $Q = 0$.

Ces deux figures 6 et 6 *bis* devraient, naturellement, être échangées l'une avec l'autre si l'on raisonnait sur l'équation (21); et, d'autre part, on ne doit, dans chaque cas, en retenir que la partie nulle, c'est-à-dire celle qui est située dans la région $\eta \geq 0$.

On formera d'ailleurs l'équation du second degré qui donne, dans le plan des $\xi\eta$ et au voisinage de l'origine, les deux ordonnées de la courbe $\Delta = 0$, en appliquant (par rapport à η) le théorème de factorisation à l'expression (26). Il est préférable d'introduire l'inconnue Q, en fonction de laquelle (25') permet de développer η : reportant dans (25), P prend la forme $P = MQ + N$, où M est une série entière en Q, pendant que

est le terme indépendant de Q, c'est-à-dire la quantité obtenue en remplaçant η par sa valeur en fonction de ξ, ν tirée de l'équation $Q = 0$. Dans l'expression $\Delta = 27\,Q^2 + 4\,(MQ + N)^3$, le théorème en question fera apparaître le facteur

où s_0, s_1 contiennent respectivement N^3 et N^2 en facteur, le premier avec un coefficient initialement égal à 1.

Les abscisses des points de rebroussement sont données par l'équation $N = 0$, et il apparaît bien qu'elles sont réelles ou imaginaires suivant le signe du premier terme de (27).

21. La quantité (26) est toujours négative et la racine réelle unique lorsque les racines du polynome du second degré (28) sont imaginaires.

Si, au contraire, les racines de ce polynome et, par conséquent, les valeurs correspondantes η', η'' de η sont réelles, les racines de l'équation du troisième degré sont toutes trois réelles lorsque η est

compris entre η' et η''. Pour des valeurs de η satisfaisant à cette condition, nous aurons, conformément à la méthode de résolution classique, à introduire un angle ω par les deux relations concordantes

$$\ldots (-P)^{\frac{3}{2}} \cos\omega, \qquad \sqrt{\Delta'} = 2(-P)^{\frac{3}{2}} \sin\omega,$$

ce qui donne (en différentiant, comme nous savons en avoir le droit, sans tenir compte de la variabilité des coefficients)

après quoi, les racines de l'équation seront

(29) $$X = \sqrt{\frac{-P}{3}} \cos \ldots$$

Ici encore, la dérivée de P n'a pas à entrer en ligne de compte; et, puisque la dérivée $\frac{dQ}{d\nu}$ est exactement ou sensiblement égale à 1, on voit que *les dérivées des racines* (29) *sont de l'ordre de* $\sqrt{\frac{-P}{\Delta'}}\,\nu$, c'est-à-dire de

(30)

La contribution de cette région du plan des $\xi\eta$ (pour une valeur déterminée de ν) à l'intégrale destinée à représenter φ_{02} s'obtient en multipliant par

$$K_2\, d\xi\, d \ldots$$

et intégrant : cette contribution est finie, comme on le voit sans même avoir besoin de tenir compte du numérateur $\sqrt{-P}$ de l'expression (28) ni du facteur K_2 (que nous avons vu s'annuler pour $\xi = \eta = 0$), puisque l'intégrale $\int_{\eta'}^{\eta''} \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta - \eta')(\eta'' - \eta)}}$ a la valeur π. La convergence est, de plus, uniforme pour toutes les valeurs (suffisamment petites) de ν.

22. Dans la région $\Delta > 0$, nous aurons, pour notre équation du

troisième degré, la racine unique

$$X = \quad 2 \quad 6\sqrt{3}\,\nu - \quad V \quad 2 \quad 6\sqrt{3}$$

T_1, T_2 étant les racines de l'équation du second degré

$$T^2 + QT - \frac{P^3}{27} = 0.$$

L'un quelconque des deux termes ainsi écrits a pour dérivée (en vertu de l'équation précédente, et en continuant à ne considérer comme variable que le terme ν explicitement décrit)

$$3 \quad d\nu - 3 \quad 2T + Q \quad - \quad \nu \quad \sqrt[2]{\Delta},$$

dérivée que nous aurons à intégrer soit dans l'intervalle $(0, \beta)$ (si les ordonnées η', η'' de la courbe $\Delta = 0$ sont imaginaires), soit dans la partie de cet intervalle extérieure à (η', η''). Ici encore, il nous suffira de noter que la dérivée que nous venons de former ne contient d'autre dénominateur que $\sqrt{\Delta}$ ou, ce qui revient au même, la racine carrée du polynome (28). Or, la primitive, par rapport à η, ou (ce qui revient au même, à des facteurs bornés près) par rapport à Q, de

est

$$\pm \log$$

expression où les signes se correspondent, mais peuvent toujours être choisis de manière que, dans l'argument du logarithme, les deux termes aient le même signe. Si l'on prend cette précaution, le logarithme portera sur une quantité bornée supérieurement (son maximum ayant lieu pour $\eta = \beta$ ou pour $\eta = 0$) et dont la borne inférieure ne sera autre que la racine carrée du discriminant D du polynome (28). Or, $D = \pm (s_1^2 - 4 s_0)$ ne diffère que par un facteur unité de N^3, de sorte que nous n'avons finalement à opérer que sur l'intégrale $\int \log N \, d\xi$, laquelle est bien convergente, et cela uniformément pour toutes les valeurs de ν.

De cette uniforme convergence, tant dans la région $\Delta > 0$ que dans la région $\Delta < 0$, il suit, comme on sait, que la différentiation par rapport à ν, sous les signes de quadrature, est légitime, et c'est tout ce qui nous était nécessaire pour étendre au cas actuel les conclusions des nos 13-15 de *J. M.*

23. Les remarques des nos 5-7 permettent de simplifier les considérations de *J. M.* (16) relatives aux termes obtenus en prenant, dans la formule (F_1), le terme (b). On va voir que ces termes n'introduisent aucune difficulté nouvelle et, pour toute disposition de la figure, relèvent de ce qui a été dit ci-dessus.

Dans la formule (F), le terme (a) est la dérivée, par rapport à ν, de l'intégrale (5 *bis*) étendue au domaine fixe S_1 (le point $1'$ étant considéré comme défini par sa projection transversale sur S_1 et sa distance transversale ν à S_1); le terme (b) est la dérivée de l'intégrale (5), laquelle est également étendue à un domaine fixe si l'on définit le point $1'$ par ν et les coordonnées ξ, η du no 5 ou du no 7. Moyennant ces choix de variables, les deux quantités à intégrer ne contiennent que des singularités indépendantes de ν.

Dans les deux quantités en question, nous avons à remplacer u_1 ou $u_{1'}$ uniquement par la partie (b) de sa valeur (F_1), laquelle est une dérivée par rapport à ν_2. Donc les deux termes considérés seront de la forme

$$[illegible]\quad \begin{cases} (ab) = \dfrac{d}{d\nu}\displaystyle\iint \dfrac{\partial}{\partial\nu_2}\Phi_1(x, y, \nu, \nu_2)\,dx\,dy, \\ (bb) = \dfrac{d}{d\nu}\displaystyle\iint \dfrac{\partial}{\partial\nu_2}\Phi_2(\xi, \eta, \nu, \nu_2)\,d\xi\,d\eta, \end{cases}$$

les intégrales étant étendues à des domaines fixes et les différentiations se faisant dans les conditions classiques. Dès lors, l'i[illegible]
des différentiations, soit

$$[illegible]\,(ab)\,[illegible]\,(bb)\,[illegible]$$

avec

[illegible]

se fera également dans les conditions classiques. Or, les intégrales J_1, J_2 ne diffèrent de celles qui ont été traitées dans ce qui précède que

par le changement de u'_2 en u_2 et de S_2 en S'_2. La question est donc toute résolue à leur égard, et l'ensemble des termes (a, b), (b, b), (c, b) donnera

$v_{02'}$ étant l'expression (19) dans laquelle le point 2 est remplacé par $2'$.

Ce raisonnement s'applique tant au cas traité dans *J. M.* qu'à celui qui vient de nous occuper.

24. La même manière de procéder permet de combler une lacune que nous avions laissée subsister dans un précédent Mémoire des *Acta Mathematica* [1] consacrée aux équations à quatre variables indépendantes. Nous avions résolu pour ces dernières, dans le travail dont il s'agit, le problème correspondant à celui que nous avons traité dans *J. M.*, c'est-à-dire que nous avions exprimé les parties constituantes $\mathcal{V}_{02}$ et V_{02} de la solution élémentaire relative aux points 0 et 2 en fonctions des quantités analogues $\mathcal{V}_{01}$, V_{01}, $\mathcal{V}_{12}$, V_{12}, moyennant intégration sur S_1 par rapport aux coordonnées du point 1. Mais nous avions à cet effet raisonné exclusivement sur les termes contenant les valeurs de la fonction φ, second membre de l'équation donnée, dans la région T_2 comprise entre S_1 et S_2.

Les termes contenant les valeurs de u'_2 (ou encore de L_2, u_2) le long de S_2 donnent lieu à des calculs exactement identiques aux premiers.

Mais il n'en est pas de même de ceux qui contiennent les valeurs de u_2 (sans facteur L) et pour lesquels les opérations semblent au premier abord plus compliquées.

En réalité, ce dernier cas se ramène au précédent par une marche tout analogue à celle que nous venons d'indiquer pour les équations à trois variables. Il suffit, en ce qui concerne le passage de S_2 à S_1, de prendre la formule de résolution du problème de Cauchy sous la forme (29 *bis*) de nos *Leçons de Yale* [2], soit, puisque $m = 4$,

---

(1) Tome XLIX, 1926.

(2) N° 144, p. 311 de l'édition française. La notation des divers termes est aussi voisine que possible de celle de A_1; mais nous les avons rangés dans un ordre plus logique et mieux adapté au raisonnement actuel.

$m_1 = 2,$

$d\text{T}$

$d\text{S}_2$

Les termes (a), (d) sont les mêmes que ceux qui figurent, avec la même notation, dans les formules (2) et (2′) du Mémoire A_1 (Mémoire des *Acta Mathematica* qui vient d'être cité). Les termes (c'), (f') se déduisent des précédents par le changement de φ en $u'_2 + \text{L}_2 u_2$, de T_2 en S_2, des intégrations quadruples en intégrations triples et des intégrations triples en intégrations doubles. Mais, de plus, on passe également suivant une loi très simple de ces termes aux termes restants (b'), (e') : on doit remplacer $u'_2 + \text{L}_2 u_2$ par u_2 et, d'autre part, appliquer la différentiation $\frac{d}{d\nu_2}$ en dehors des signes de quadrature. Telle est l'expression u_1 à laquelle, pour arriver à u_1, on doit appliquer, le long de S_1, la formule de résolution, que l'on peut d'ailleurs également prendre sous la forme précédente; les termes (b'), (e') et aussi, comme précédemment, (c') et (f') (pour la partie qui ne contient pas L) seront des dérivées par rapport à ν. Ici encore, les intégrales ainsi différentiées étant relatives à des domaines fixes, si l'on applique à (b') et à (e') la méthode du n° 5 ou du n° 7. Dans ces conditions, si, après avoir formé les termes

(32) $(c'd)$, $(f'a)$, $(f'd)$,

dont le calcul a été indiqué dans A_1 et, d'une manière tout identique, $(c'c')$, $(c'f')$, $(f'c')$, $(f'f')$, $(b'c')$, $(b'f')$, $(e'c')$, $(e'f')$, on passe aux termes

$(c'b')$,

ceux-ci seront de forme tout analogue à (31); et c'est en vertu des règles classiques que l'on pourra faire sortir la différentiation $\frac{d}{d\nu_2}$ des signes de quadrature, en l'intervertissant, au besoin, avec la différentiation par rapport à ν.

Moyennant cette transformation, les expressions soumises à la différentiation en ν_2 sont identiques aux termes (32), au changement près de $u'_2 + L_2 u_2$ en u_2, et relèvent, par conséquent des mêmes calculs.

En un mot, la valeur de $\mathcal{V}_{02}$, fournie par la formule (14) (nº 19) du Mémoire cité A_1 et la valeur de V_{02} donnée au nº 20 du même Mémoire permettent de construire la valeur u_0, solution du problème de Cauchy, à partir des données portées par S_2, absolument comme le permettaient $\mathcal{V}_{01}$, V_{01} à partir des données sur S_1. C'est ce qui ne ressortait pas des calculs du Mémoire en question.

UN CAS SIMPLE

DIFFUSION DES ONDES

(*Recueil mathématique de Moscou*, t. 41,

Les études que j'ai consacrées dans ces dernières années au principe de Huygens [1] m'ont fourni une première réponse, imparfaite encore, à la question de la diffusion des ondes, c'est-à-dire à la question de savoir si l'onde qui propage une perturbation initialement limitée dans le temps et dans l'espace (mais arbitraire à cela près) laisse ou non, après son passage, une perturbation résiduelle. On suppose que le phénomène est régi par une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre.

La réponse peut être immédiatement donnée lorsque l'équation aux dérivées partielles est à un nombre impair de variables indépendantes. Les équations de cette nature donnent toujours lieu à diffusion.

Dans le cas où le nombre m des variables indépendantes est pair, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait pas diffusion (quelle que soit la forme de la perturbation initiale) est que la « solution élémentaire » [2] manque de terme logarithmique. Par contre — et c'est en cela que la réponse est incomplète et demande

(1) Voir mes *Lectures on Cauchy's problem* ou la traduction française (Paris, Hermann, liv. IV, 1932); *Bull. Soc. math. de France*, t. LII, 1924.

(2) *Voir* l'ouvrage cité, liv. II.

à être améliorée [1] — on ignore, pour $m = 4, 6, \ldots$, quelles sont toutes les équations aux dérivées partielles qui satisfont à cette condition : on sait seulement que tel est le cas pour l'équation des ondes sphériques et ses analogues (donc aussi pour leurs transformées simples).

L'exemple sur lequel je voudrais attirer l'attention est relatif au cas de $m = 2$. Dans ce cas, la solution élémentaire ne peut pas manquer de terme logarithmique, le coefficient du logarithme n'étant autre que la fonction classique qui figure dans la méthode de Riemann. Il en résulte que le phénomène de la diffusion doit exister toujours dans ce cas. C'est d'ailleurs lui, on le sait, qui a donné lieu à la découverte du phénomène, à l'occasion de l'équation des télégraphistes : il se manifeste par un « effet nuisible » que l'expérience a révélé avant même qu'il eût été prévu par la théorie.

Mais qu'arrive-t-il, à cet égard, pour l'équation la plus simple

$$\frac{\quad}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$\left(\text{équivalente à } \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = 0\right)$, celle qui gouverne, par exemple, les vibrations transversales des cordes et les vibrations longitudinales des tuyaux sonores ? On est habitué à considérer ces phénomènes comme le type le plus élémentaire de propagation d'ondes, et il est inattendu de les voir se comporter de manière moins simple que ne le font les ondes sphériques.

Tel est pourtant nécessairement le cas, d'après ce que nous venons de dire. La théorie générale permet sans difficulté de préciser, en partant de la forme connue de la fonction de Riemann, identiquement égale à l'unité pour l'équation précédente. Mais il est bien aisé aussi de mettre en évidence le résultat sur la solution classique du problème, telle qu'elle est connue depuis d'Alembert et Euler.

Il convient de raisonner exclusivement sur le problème de Cauchy, ce qui oblige à ne considérer que la seconde des deux interprétations ci-dessus mentionnées, afin d'éviter l'intervention des extrémités. Nous considérons donc un tuyau sonore rectiligne et illimité dans

[1] Un jeune géomètre polonais, M. Matthisson, annonce avoir résolu la question.

les deux sens dont on donne initialement, c'est-à-dire pour $t = 0$, le mouvement, en se donnant, à cet instant, les déplacements (longitudinaux) et les vitesses initiales, également longitudinales, soit

$$0) =$$

$$\frac{\quad , 0)}{\partial t} =$$

Les fonctions g et h étant supposées données pour toutes les valeurs réelles de la variable x, on sait qu'on en déduit immédiatement les deux fonctions φ et ψ qui figurent dans l'intégrale générale

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at) = [\varphi(X) + \psi(Y)]$$

de l'équation (1), savoir

$$\varphi(X) \qquad\qquad \frac{1}{\quad} \int h$$

α désignant une constante fixe quelconque qu'on peut, dans la question actuelle, rendre égale à $-\infty$.

La question qui nous intéresse se pose lorsque les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ sont supposées identiquement nulles partout, excepté dans un petit intervalle déterminé (x', x'') : ceci en s'imposant des conditions de continuité aux extrémités de cet intervalle, par exemple, que g et h s'annulent dans ces extrémités ou, plus restrictivement encore, s'annulent ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à un certain ordre p.

Conformément à la discussion générale qui résout un tel problème et qui est bien connue en ce qui concerne l'équation des télégraphistes, l'étude du phénomène, pour un point donné $x = x_0$ du milieu et à un instant donné $t = t_0$, doit distinguer trois cas.

Premier cas. — (x_0, t_0) est *hors d'onde* avec la perturbation initiale, c'est-à-dire qu'à l'instant t_0 l'effet de celle-ci ne peut pas se faire sentir au point $x = x_0$: c'est ce qui a lieu pour

$$x_0 < x' - at_0 \qquad \text{ou} \qquad x_0 > x'' + at_0.$$

On a alors $u = 0$ (soit que les termes intégraux qui figurent dans

les formules (2) soient nuls tous deux, ainsi que l'est la fonction g, soit que ces deux termes se détruisent).

Deuxième cas. — (x_0, t_0) est *en onde* avec la perturbation initiale, c'est-à-dire qu'à l'instant t_0 l'une des deux ondes qui propagent cette perturbation est en train de passer au point d'abscisse x_0.

Troisième cas. — (x_0, t_0) est *sous onde* avec la perturbation initi c'est-à-dire qu'à l'instant t_0, l'une des deux ondes a déjà passé en x_0 et a dépassé ce point. Dans ce dernier cas la quantité

est inférieure à x', mais la quantité

$$X_0 = x_0 + at_0$$

est supérieure à x''.

Les deux quantités $g(X_0)$, $g(Y_0)$ seront donc nulles dans nos hypothèses, et il en sera de même du terme intégral qui figure dans la seconde formule (2). *Mais celui qui figure dans la valeur de* $\varphi(X_0)$ *est au contraire différent de zéro* : il se réduit à la constante

$$C = \frac{\,}{\,}$$

Telle est donc la valeur résiduelle de u, après le passage de l'onde. Si, comme nous l'avons supposé, il s'agit d'un tuyau sonore, on voit qu'après le passage de l'onde, les molécules aériennes reviennent au repos, mais non pas dans leur position primitive. Toute la portion de tuyau comprise entre les deux ondes qui propagent, vers la droite et vers la gauche respectivement, la perturbation initiale, aura subi une translation d'ensemble, de grandeur C. Cette quantité C est en général différente de zéro, même en tenant compte des hypothèses de continuité faites sur les fonctions g et h.

Dans tout phénomène régi par une équation de la forme (1), les ondes doivent laisser après leur passage un effet résiduel constant donné par la loi que nous venons d'obtenir.

LISTE DES TRAVAUX PAR ANNÉES

LISTE DES TRAVAUX PAR ANNÉES

1884.

. Sur le limaçon de Pascal (*Journ. Math. spéc.*, 2e série, t. 3, p. 80-83).

. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (*Journ. Math. spéc.*, 2e série, t. 3, p. 226-232).

1885.

bis. Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (*Journ. Math. spéc.*, 2e série, t. 4, p. 41-42).

1888.

3. Sur le rayon de convergence des séries ordonnées suivant les puissances d'une variable (*Comptes rendus*, t. 106, p. 259).

Recherche des surfaces anallagmatiques par rapport à une infinité de pôles d'inversion (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 12, p. 118-121).

1889.

Sur la recherche des discontinuités polaires (*Comptes rendus*, t. 108, p. 722).

1892.

Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. Thèse de Doctorat de la Faculté des Sciences (*Journ. Math.*, 4e série, t. 8, p. 101-186).

Sur les fonctions entières de la forme $e^{G(x)}$ (*Comptes rendus*, t. 114, p. 1053).

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann. Mémoire couronné par l'Académie (Grand Prix des Sciences mathématiques) (*Journ. Math.*, 4e série, t. 9, p. 171-215).

1893.

Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant (*Comptes rendus*, t. 116, p. 1500).

10. Résolution d'une question relative aux déterminants (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 17, p. 240-246).

11. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs (*Comptes rendus*, t. 117, p. 844).

1894.

12. Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes (avec note complémentaire) (*Acta Math.*, t. 18, p. 319-336 et 421).
13. Remarque sur les rayons de courbure des roulettes (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 19 avril).
14. Sur les mouvements de roulement (*Comptes rendus*, t. 118, p. 911-912).
15. Sur le théorème de Jacobi relatif au mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 19 juillet).
16. Sur l'élimination (*Comptes rendus*, t. 119, p. 995-997).

1895.

17. Sur le tautochronisme (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 7 février).
18. Sur l'expression du produit $1.2.3...(n-1)$ par une fonction entière (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 19, p. 69-71).
19. Sur une congruence remarquable et sur un problème fonctionnel qui s'y rattache (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 14 février).
20. Sur les éléments infinitésimaux du second ordre dans les transformations ponctuelles (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 19 décembre).
21. Sur la précession dans le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 19, p. 228-230).
22. Sur la stabilité des rotations d'un corps solide pesant (*Ass. franç.*, *Congr. Bordeaux*).
23. Sur les mouvements de roulement (*Mém. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*).
24. Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*).

    Ces deux travaux ont été réimprimés dans le volume de M. Appell : « Les roulements en Dynamique » (*Collection Scientia*, Paris, Carré et Naud, 1899, p. 47-68 et 69-70).

1896.

25. Mémoire sur l'élimination (*Acta Math.*, t. 20, p. 201-238).
26. Une propriété des mouvements sur une surface (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 30 avril).
27. Une propriété des mouvements sur une surface (*Comptes rendus*, t. 122, p. 983).
28. Sur l'instabilité de l'équilibre (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 21 mai).
29. Sur les fonctions entières (*Comptes rendus*, t. 122, p. 1257-1258).
30. Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique. Mémoire couronné par l'Académie (Prix Bordin) (*Journ. Math.*, 5e série, t. 3, p. 331-387).
31. Sur les lignes géodésiques des surfaces spirales et les équations différentielles qui s'y rapportent (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 4 juin).
32. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (*Comptes rendus*, t. 122, p. 1470-1473).
33. Sur la fonction $\zeta(s)$ (*Comptes rendus*, t. 123, p. 93).

34. Sur les fonctions entières (*Bull. Soc. math. France*, t. 24, p. 186-187).
35. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques (*Bull. Soc. math. France*, t. 14, p. 199-220).
36. Sur une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 20, p. 263-266).
37. Sur la décomposition de deux figures géométriques équivalentes en un nombre fini d'éléments superposables chacun à chacun (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, Communication de Brunel, 24 décembre).

1897.

38. Sur les notions d'aire et de volume (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 21 janvier).
39. Sur les séries de Dirichlet (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 18 février).
40. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 4 mars).
41. Théorème sur les séries entières (*Comptes rendus*, t. 124, p. 135).
42. Sur les principes fondamentaux de la Mécanique (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 18 mars).
43. Sur la démonstration d'un théorème d'Algèbre (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 1er avril).
44. Sur les conditions de décomposition d'une forme ternaire (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 13 mai).
45. Sur les séries entières (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 3 juin).
46. Sur les lignes géodésiques (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 17 juin).
47. Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées (*Comptes rendus*, t. 124, p. 149).
48. Sur les lignes géodésiques (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 1er juillet).
49. Sur certaines applications possibles de la théorie des ensembles (*Ier Congr. intern. Math.*, Zurich).
50. Sur une surface à courbures opposées (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 22 juillet).

1898.

51. Théorèmes sur les séries entières (*Acta Math.*, t. 22, p. 55-64).
52. Sur la généralisation du théorème de Guldin (*Bull. Soc. math. France*, t. 26, p. 264-265).
53. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques (*Journ. Math.*, 5e série, t. 4, p. 27-73).
54. Sur la courbure dans les espaces à plus de deux dimensions (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 3 février).
55. Sur la forme de l'espace (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 3 février).
56. Les invariants intégraux et l'Optique (*Comptes rendus*, t. 126, p. 82).
57. Sur la forme des géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre (*Bull. Soc. math. France*, t. 26, p. 195-216).

58. Sur le billard non euclidien (*Proc-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 5 mai).
59. Leçons de Géométrie élémentaire (Géométrie plane) (Paris, Armand Colin).

1899.

60. Sur les conditions de décomposition des formes (*Bull. Soc. math. France*, t. 27, p. 34-47).

1900.

61. Sur les points doubles des contours fermés (*Proc.-verb. Soc. Sc. phys. et nat. Bordeaux*, 12 janvier).
62. Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales (*Bull. Soc. math. France*, t. 28, p. 64-66).
63. Sur l'intégrale résiduelle (*Bull. Soc. math. France*, t. 28, p. 69-90).
64. Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles (*II^e Congr. intern. Math.*, Paris).
65. Note sur l'induction et la généralisation en mathématiques (*Congr. intern. Philos.*, Paris).
66. Sur les singularités de certaines séries (*Intermédiaire des Mathématiciens*).

1901.

67. La série de Taylor et son prolongement analytique (*Collection Scientia*, Paris, Carré et Naud).
68. Sur la propagation des ondes (*Bull. Soc. math. France*, t. 29, p. 50-60).
69. Sur les réseaux de coniques (*Bull. Sc. math.*, t. 25, p. 27-30).
70. Sur les éléments linéaires à plus de deux dimensions (*Bull. Sc. math.*, t. 25, p. 37-60).
71. Leçons de Géométrie élémentaire (Géométrie dans l'espace) (Paris, Armand Colin).
72. Sur l'équilibre des plaques circulaires libres ou appuyées et sur celui de la sphère isotrope (*Ann. Soc. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 18, p. 313-342).
73. Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles (*Bull. Soc. math. France*, t. 29, p. 224-228).
74. La bosse des Mathématiques (*Rev. gén. Sc.*, t. 11).

1902.

75. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique (*Bull. Univ. Princeton*, t. 13, p. 49-52).
76. La théorie des plaques élastiques planes (*Trans. American math. Soc.*, t. 3, p. 401-422).
77. Deux théorèmes d'Abel sur la convergence des séries (*Acta Math.*, t. 26, p. 177-183).
78. Sur certaines surfaces minima (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 26, p. 357-361).
79. Sur les dérivées des fonctions de lignes (*Bull. Soc. math. France*, t. 30, p. 40-43).
80. Sur une classe d'équations différentielles (*Bull. Soc. math. France*, t. 30, p. 208-220).
81. Sur une question de calcul des variations (*Bull. Soc. math. France*, t. 30, p. 253-256).

82. Sur une condition qu'on peut imposer à une surface (*Bull. Soc. math. France*, t. 30, p. 111).
83. Compte rendu de Larmor, *Aether and Matter* (*Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 26, p. 319-328).
84. Compte rendu de Bouvier, *La Méthode mathématique en Économie politique* (*Rev. gén. Sc.*, t. 13).
85. Sur les fonctions entières (*Comptes rendus*, t. 135, p. 1309).

1903.

86. Sur les glissements dans les fluides (*Comptes rendus*, t. 136, p. 299).
87. Sur les glissements dans les fluides (Note complémentaire) (*Comptes rendus*, t. 136, p. 545).
88. Sur les opérations fonctionnelles (*Comptes rendus*, t. 136, p. 351).
89. Sur un problème mixte aux dérivées partielles (*Bull. Soc. math. France*, t. 31, p. 208-224).
90. Sur les surfaces à courbure positive (*Bull. Soc. math. France*, t. 31, p. 300-301).
91. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique (Paris, Hermann).
92. Sur les équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre (*Comptes rendus*, t. 137, p. 1028).
93. Les sciences dans l'Enseignement secondaire (Conférence faite à l'École des Hautes Études sociales) (Paris, Alcan).

1904.

94. Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique (*Bull. Soc. math. France*, t. 32, p. 242-268).
95. Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3^e série, t. 21, p. 535-556).
96. Sur un point de la théorie des percussions (*Nouv. Ann. Math.*, 4^e série, t. 4, p. 533-535).
97. Sur les séries de la forme $\Sigma a_n e^{-\lambda_n z}$ (*Nouv. Ann. Math.*, 4^e série, t. 4, p. 529-533).
98. Sur les solutions fondamentales des équations linéaires aux dérivées partielles (*III^e Congr. intern. Math.*, Heidelberg).
99. Sur les données aux limites dans les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique (*III^e Congr. intern. math.*, Heidelberg).

1905.

100. Recherches sur les solutions fondamentales et l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles (2^e Mémoire) (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3^e série, t. 22, p. 101-141).
101. Sur les équations aux dérivées partielles (2^e Note) (*Comptes rendus*, t. 140, p. 425).
102. Sur quelques questions de Calcul des variations (*Bull. Soc. math. France*, t. 33, p. 73-80).

103. Sur la théorie des coniques (*Nouv. Ann. Math.*, 4e série, t. 5, p. 14

104. Lettres sur la théorie des ensembles (Correspondance avec MM. Borel, Baire et Lebesgue) (*Bull. Soc. math. France*, t. 33, p. 261-273).

105. Remarque au sujet d'une Note de M. Gyözö-Zemplen (*Comptes rendus*, t. 141, p. 713).

106. A propos d'enseignement (*Rev. gén. Sc.*, t. 16).

107. La théorie des ensembles (*Rev. gén. Sc.*, t. 16).

108. Réflexions sur la méthode heuristique (*Rev. gén. Sc.*, t. 16).

1906.

109. Sur un théorème de M. Osgood, relatif au Calcul des variations (*Bull. Soc. math. France*, t. 34, p. 61).

110. Sur la mise en équation des problèmes de Mécanique (*Nouv. Ann. Math.*, 4e série, t. 6, p. 97-100).

111. Sur les transformations planes (*Comptes rendus*, t. 142, p. 74).

112. Sur les transformations ponctuelles (*Bull. Soc. math. France*, t. 34, p. 71-84).

113. Compte rendu de *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, de Gibbs (*Bull. of the Amer. math. Soc.*, t. 12, p. 194-210. Réimprimé dans *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 30, p. 161-179).

114. Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles (Conférences faites à la Société mathématique de France et à la Société française de Physique) (*Bull. Soc. franç Phys.*, *Journ. Phys.*).

115. Sur une méthode de Calcul des variations (*Comptes rendus*, t. 143, p. 1127).

116. La logistique et l'induction complète (*Rev. gén. Sc.*, t. 17).

117. Les principes de la théorie des ensembles (*Rev. gén. Sc.*, t. 17).

118. Sur les caractéristiques des systèmes aux dérivées partielles (*Bull. Soc. math. France*, t. 24, p. 48-52).

119. Sur le principe de Dirichlet (*Bull. Soc. math. France*, t. 24, p. 135-138).

120. La logistique et la notion de nombre entier (*Rev. gén. Sc.*, t. 17).

1907.

121. Sur quelques questions de Calcul des variations (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. 24, p. 203-231).

122. Sur l'interprétation théorique des raies spectrales (*Bull. Soc. franç. Phys.*).

123. Sur la variation des intégrales doubles (*Comptes rendus*, t. 144, p. 1092).

124. Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Mémoire couronné par l'Académie (Prix Vaillant) (*Mém. Sav. étrang.*, t. 33).

1908.

125. Sur les séries de Dirichlet (*Rendic. del Circolo Matematico*, t. 25, p. 326-330).

126. Rectification à la Note « Sur les séries de Dirichlet » (*Rendic. del Circolo Matematico*, t. 25, p. 395-396).

127. Théorie des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques et du problème de Cauchy (*Acta Math.*, t. 31, p. 333-380).
128. Sur l'expression asymptotique de la fonction de Bessel (*Bull. Soc. math. France*, t. 36, p. 77-85).
129. Sur certaines particularités du Calcul des variations (*IV^e Congr. Math.*, Rome).
130. Sur certains cas intéressants du problème biharmonique (*IV^e Congr. Math.*, Rome).
131. Les paradoxes de la théorie des ensembles (*Rev. gén. Sc.*, t. 19).

1909.

132. Sur les lignes géodésiques (à propos d'une Note de M. Drach) (*Comptes rendus*, t. 148, p. 272).
133. Sur une propriété fonctionnelle de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (*Bull. Soc. math. France*, t. 37, p. 59-60).
134. Détermination d'un champ électrique (*Ann. Chim. et Phys.*, 8^e série, t. 16).
135. Notions élémentaires sur la géométrie de situation (*Nouv. Ann. Math.*, 4^e série, t. 9, p. 193-235).
136. La géométrie de situation et son rôle en mathématiques (Leçon d'ouverture professée au Collège de France) (*Revue du mois*, t. 8).

1910.

137. Leçons sur le Calcul des variations (Paris, Hermann).
138. Sur les ondes liquides (*Comptes rendus*, t. 150, p. 609).
139. Sur les ondes liquides (2^e Note) (¹) (*Comptes rendus*, t. 150, p. 772).
140. Quelques propriétés des fonctions de Green (*Comptes rendus*, t. 150, p. 764).
141. Sur quelques applications de l'indice de Kronecker (Note additionnelle à la deuxième édition de l'« Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable » de J. Tannery) (Paris, Hermann).
142. Sur un problème de cinématique navale (*Nouv. Ann. Math.*, 4^e série, t. 10, p. 337-361. Réimprimé dans *Rev. mar.*, avril 1911).

1911.

143. Sur les trajectoires de Liouville (*Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 35, p. 106-113).
144. Relation entre les solutions des équations aux dérivées partielles des types parabolique et hyperbolique (*Bull. Soc. math. France*, t. 39, Comptes rendus des séances).
145. Solution fondamentale des équations linéaires aux dérivées partielles du type parabolique (*Comptes rendus*, t. 152, p. 1148).

(¹) Ces deux Notes sont développées dans un travail ultérieur de M. Bouligand (*Bull. Soc. math. France*, t. 40).

146. Mouvement permanent lent d'une sphère liquide et visqueuse dans un liquide visqueux (*Comptes rendus*, t. 152, p. 1735).

147. Sur l'inégalité

à laquelle satisfont les variations de la fonction de Green quand on passe d'un contour à un contour voisin (*Bull. Soc. math. France*, t. 39, Comptes rendus des séances).

148. Sur les propriétés des fonctions de Green dans le plan (*Bull. Soc. math. France*, t. 39, Comptes rendus des séances).

149. Le calcul fonctionnel (Recueil de travaux dédiés à la mémoire de Louis Olivier. Reproduit dans *Enseign. math.*, 1912, p. 1-18).

150. Propriétés générales des corps et domaines algébriques (en collaboration avec M. Kürschak) (*Encycl. Sc. math.*, édition française, t. 1, vol. 2, p. 233-385).

151. Maurice Lévy (*Rev. gén. Sc.*, t. 22).

152. Four lectures on mathematics, données à Columbia University (New-York) en octobre 1911 (Columbia University Press, 1915).

1912.

153. Sur une question relative aux liquides visqueux (Note rectificative) (*Comptes rendus*, t. 154, p. 109).

154. Sur les variations unilatérales et les principes du Calcul des variations (*Bull. Soc. math.*, Comptes rendus des séances, p. 20).

155. Sur les extrémales du problème isopérimétrique dans le cas des intégrales doubles (*Bull. Soc. math.*, Comptes rendus des séances, p. 20).

156. Sur la généralisation de la notion de fonction analytique (*Bull. Soc. math.*, Comptes rendus des séances, p. 28).

157. Sur la loi d'inertie des formes quadratiques (*Bull. Soc. math.*, Comptes rendus des séances, p. 29).

158. Propositions transcendantes de la théorie des nombres (en collaboration avec M. Maillet) (*Encycl. Sc. math.*, édition française, t. 1, vol. 3, p. 215-387).

159. Itération des noyaux infinis dans le cas des intégrales doubles (Note additionnelle à Fréchet et Heywood, « L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique » (Paris, Hermann).

160. Observation à propos de la communication de M. Borel « Remarque sur la théorie des résonateurs » (*Bull. Soc. franç. Phys.*).

161. Sur la série de Stirling (*V^e Congr. intern. Math.*, Cambridge).

162. Henri Poincaré (*Rev. Métaph. et Mor.*, t. 21, 617-658; *Revue du mois*, t. 16, p. 385-418).

163. L'œuvre mathématique de H. Poincaré (*Acta Math.*, t. 38, 1921, p. 203-287).

1913.

164. La construction de Weierstrass et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique [*Annali di Mat.*, 3e série, t. 21 (volume du Centenaire de Lagrange), p. 251-287].
165. Observations à propos d'une Note de M. Bouligand (*Comptes rendus*, t. 156, p. 1364).

1914.

166. Points pinces, arêtes de rebroussement et représentation paramétrique des surfaces (*Enseign. math.*, t. 16, p. 356-359).
167. L'infini mathématique et la réalité (*Revue du mois*).
168. Sur la limitation du module des dérivées (*Bull. Soc. math. France*, t. 42, Comptes rendus des séances, p. 68-72).
169. A propos d'une Note de M. Paul Lévy sur la fonction de Green (*Comptes rendus*, t. 158, p. 1010-1011).

1915.

170. Sur un Mémoire de M. Sundman (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 39, p. 249, 264).

1916.

171. Sur les ondes liquides (*Rend. Acad. Lincei*, Rome, 5e série, t. 25, p. 716-719).
172. Sur l'élimination entre équations différentielles (*Nouv. Ann. Math.*, 4e série, t. 17, p. 81-84).

1919.

173. Remarques sur l'intégrale résiduelle (*Comptes rendus*, t. 168, p. 533-534).
174. Sur les correspondances ponctuelles (*Bull. Soc. math. France*, t. 47, Comptes rendus des séances, p. 28-29 et *Revista Mat. hispano-americana*).
175. Sur les singularités des séries entières (*Bull. Soc. math. France*, t. 47, Comptes rendus des séances, p. 40).
176. Sur un théorème fondamental de la Théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables (*Bull. Soc. math. France*, t. 47, Comptes rendus des séances, p. 44-46).
177. Démonstration directe d'un théorème de Poincaré sur les périodes des intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique qui satisfait à une équation différentielle linéaire (*Bull. soc. math. France*, t. 47, Comptes rendus des séances, p. 46).
178. Recherche du balourd dynamique des obus (Travaux du Laboratoire d'Essais des Arts et Métiers).

1920.

179. Sur certaines solutions d'une équation aux dérivées fonctionnelles linéaires hyperboliques non analytiques (*Comptes rendus*, t. 170, p. 355-359).

180. La solution élémentaire des équations aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, t. 170, p. 149-154).
181. Rapport sur les travaux examinés et retenus par la Commission de Balistique de l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. 170, p. 436-445).
182. Sur la solution élémentaire des équations aux dérivées partielles et sur les propriétés des géodésiques (*Congr. intern. Math.*, Strasbourg, p. 179-184).
183. Sur le problème mixte pour les équations linéaires aux dérivées partielles (*Congr. intern. math.*, Strasbourg, p. 499-503).

1921.

184. On some topics connected with linear partial differential equations (*Proc. Bénarès Math. Soc.*, t. 3, p. 39-48).
185. A propos d'Enseignement secondaire (*Rev. intern. Enseign.* et *Bull. Union natur.*).
186. Sur la comparaison des problèmes aux limites pour les deux principaux types d'équations aux dérivées partielles (*Bull. Soc. math. France*, t. 49, Comptes rendus des séances, p. 28).

1922.

187. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations (Cambridge-New-Haven).
188. L'enseignement secondaire et l'esprit scientifique (*Rev. France*).
189. Einstein en France (*Rev. intern. Enseign*).
190. Les principes du Calcul des probabilités (*Rev. Métaph. et Mor.*, t. 39).
191. A propos des notions d'homogénéité et de dimension (*Soc. franç. Phys.* et *Journ. Phys.*)
192. Sur un théorème de Géométrie élémentaire (*Bull. off. Recherc. et Inv.*, décembre).
193. Sur la fonction harmonique la plus voisine d'une fonction donnée (*Assoc. franç. avanc. Sc.*).
194. Sur une question de Calcul des probabilités (*Ass. franç. avanc. Sc.*).
195. Les responsabilités des guerres. Comment déterminer l'agresseur ? (*Cahier des Droits de l'Homme*, avril).
196. The early scientific work of H. Poincaré (*Rice Institute pamphlet*, t. 9, p. 111-183).

1923.

197. La notion de différentielle dans l'enseignement (*Scripta de l'Université de Jérusalem*, t. 1, n° 4).
198. Poincaré i la teoria de les ecuacions diferentials (Conférences prononcées à l'Institut d'études catalanes à Barcelone).
199. La réforme de l'Enseignement secondaire (Conférence à l'Assemblée générale des étudiants, *Bull. scient. Étud. Paris*).
200. Sur les points doubles des lieux géométriques et sur la construction par régions (*Nouv. Ann. Math.*, 5e série, t. 1, p. 364-379).

201. La pensée française dans l'évolution des Sciences exactes (*France et Monde*).
202. Sur une formule déduite de la théorie des fonctions elliptiques (*Bull. Soc. math. France*, t. 51, p. 295-296).
203. Sur les tourbillons et les surfaces de glissement dans les fluides (*Comptes rendus*, t. 177, p. 505-506).

1924.

204. Principe de Huygens et prolongement analytique (*Bull. Soc. math. France*, t. 52, p. 241-278).
205. Quelques conséquences analytiques du principe de Huygens (13e Réunion de la Société italienne pour l'avancement des Sciénces à Naples (*Atti della Soc. ital. per il progresso della Scienza*, t. 16, p. 164-168).
206. Sobre la represencion grafica de l'espacio de quatro dimensiones (*Revista Mat. hispano-americana*).
207. Comment je n'ai pas découvert la Relativité ? (*Congrès Philosophie*, Naples).
208. Le développement de la notion de fonction (en portugais, Conférences à l'École Polytechnique de Rio de Janeiro, rédigées par J. Nicoletis, *Revista da Acad. Brasileira de Ciencias*).
209. Le principe de Huygens (Conférence pour le cinquantenaire de la Société mathématique de France) (*Bull. Soc. math. France*, t. 52, p. 610-640).

1925.

210. On quasi analytic functions (*Proc. Nat. Ac. Sc. of U.S.A.*, t. 11, p. 447-448).
211. Sur le calcul approché des intégrales définies (*Proc. Nat. Ac. Sc. of U.S.A.*, t. 11, p. 448-450, et *Bull. Soc. math. France*, Comptes rendus des séances, p. 21-22).
212. Itération et fonctions quasi analytiques (*Rev. gén. Sc.*).
213. Sobre un tipo de ecuaciones integrales singulares (*Revista Acad.* Madrid, t. 22, p. 187-191).

1926.

214. Sur une série entière en relation avec le dernier théorème de Fermat (*Bull. Soc. math. France*, Comptes rendus des séances, p. 21-22).
215. Sur les équations intégrables par la méthode de Laplace (*Bull. Soc. math. France*, Comptes rendus des séances, p. 33-35).
216. Sur la Géométrie anallagmatique (*Bull. Soc. math. France*, Comptes rendus des séances, p. 35-39).
217. Préface de Gonseth « Les fondements des Mathématiques » (reproduit dans *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 51, 1927, p. 66-73).
218. Quelques cas d'impossibilité du problème de Cauchy (*In memoriam* N. I. Lobatchewsky, édité par la Société mathématique de Kazan, *Centenaire de Lobatchewsky*, t. 2).
219. Sur la théorie des séries entières (*Nouv. Ann. Math.*, 6e série, t. 1, p. 161-164).
220. A propos du nouveau programme de Mathématiques spéciales (*Nouv. Ann. Math.*, 6e série, t. 1, p. 257-276 et 391-393).

221. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. 1 (Paris, Hermann).
222. Le principe de Huyghens dans le cas de quatre variables indépendantes (*Acta Math.*, t. 49, p. 203-244).

1927.

223. Récents progrès de la Géométrie anallagmatique (*Revista Mat. hispano-americana* t. 2, et *Nouv. Ann. Math.*, 6e série, t. 2, p. 257-273 et 289-320).
224. Sur la théorie des fonctions entières (*Bull. Soc. math. France*, t. 55, p. 135-137).
225. Sur les éléments riemanniens et le déplacement parallèle (*Bull. Soc. math. France*, t. 55, Comptes rendus des séances, p. 30-31).
226. Sulle funzioni intere di genere finito. Lettre à M. Landau (*Rend. Lincei*, t. 6, p. 3-9).
227. L'œuvre de Duhem sous son aspect mathématique (*Mém. Soc. phys. et nat. Bordeaux*, t. 17).
228. Sur le battage des cartes (*Comptes rendus*, t. 185, p. 5-9).

1928.

229. Observations sur une Note de M. Hostinsky (*Comptes rendus*, t. 186, p. 62).
230. Sur les opérations itérées en Calcul des probabilités (*Comptes rendus*, t. 186, p. 189-192).
231. Sur le principe ergodique (*Comptes rendus*, t. 186, p. 275-276).
232. Deux exercices de Mécanique (*Enseign. scient.*, t. 1).
233. A propos de Géométrie anallagmatique (*Enseign. scient.*, t. 1).
234. Les méthodes d'enseignement des sciences expérimentales (*Rev. intern. enseign.*, 47e année).
235. Une propriété de la fonction $\zeta(s)$ et des séries de Dirichlet (*Bull. Soc. math. France*, Comptes rendus des séances, p. 43-44 et *Congr. Ass. franç. avanc. Sc.*, La Rochelle).
236. Sur l'enseignement de la Mécanique (*Congr. Ass. franç. avanc. Sc.*, La Rochelle).
237. Le développement et le rôle scientifique du Calcul fonctionnel (*Congr. intern. math.*, Bologne).
238. Sur le battage des cartes et ses relations avec la Mécanique statistique (*Congr. intern. math.*, Bologne).
239. Les responsabilités de la guerre (*Cahiers des Droits de l'Homme* et *Libres propos*, septembre 1929).
240. La peine de mort et le Code pénal (*Cahiers des Droits de l'Homme*).

1929.

241. Huyghensuv princip (Conférence faite à l'Université Charles à Prague et à l'Université Mazaryk à Brno) (*Casopis pro pestovani Mathematicy a fysiky*).
242. Le principe de Huygens pour les équations à trois variables indépendantes

(*Journ. Math.*, 9e série, t. 8, volume en hommage à MM. Appell et Picard, p. 197-228).

243. On ordinary restricted extrema in connection with point transformations (*Bull. Amer. Soc.*, t. 35, p. 823-828).

1930.

244. Sur les arêtes de rebroussement de certaines enveloppes (*Comptes rendus du Ier Congrès des mathématiciens des pays slaves en* 1929).
245. Remarques géométriques sur les enveloppes et la propagation des ondes (*Acta Math.*, t. 54, p. 247-261).
246. La physique et la culture générale (*Œuvre*, 30 janvier).
247. La question de la Physique (*Œuvre*, 16 février).
248. Un nouveau pas à faire dans la voie de la Paix : conventions scolaires (*La paix par le Droit*).
249. Équations aux dérivées partielles et fonctions de variables réelles (*Congrès des mathématiciens slaves à Kharkov*; traduction ukrainienne dans *Comm. Soc. Math.*, Kharkow, 4e série, t. 5, 1932, p. 11-20).
250. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. 2 (Paris, Hermann).

1931.

251. Parlons culture générale (*Œuvre*, 13 janvier).
252. Formation ou déformation intellectuelle (*Œuvre*, 19 janvier).
253. Une culture qu'il ne faudrait pas détruire (*Œuvre*, 24 janvier).
254. La question de la Physique (*Œuvre*, 16 février).
255. Multiplication et division (*Enseign. scient.*).

1932.

256. La propagation des ondes et les caustiques (*Commentarii Math. Helvetici*, t. 5, p. 137-173).
257. Sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur (*Congr. intern. Math.*, Zurich).
258. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre (*Enseign. scient.*).
259. Réponse à une enquête sur l'histoire des Sciences dans l'enseignement (*Enseign. scient.*).
260. Coordination d'enseignements (*Enseign. scient.*).

Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques (traduction des leçons professées à Yale) (Paris, Hermann).

1933.

262. Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre (*Tôhoku Math. Journ.*, t. 37, dédié à T. Hayashi, p. 133-150).

263. Painlevé, le Savant (*Vu*).
264. Réponse à une enquête sur la revision des traités (*Paix mondiale*).
265. Sur les probabilités discontinues des événements en chaîne (en collaboration avec M. Fréchet) (*Zeits. angew. Math. u. Mech.*, t. 13, p. 92-97).

1934.

266. Sur un résultat relatif aux équations algébriques (*Bull. Soc. math. France*, t. 62, Comptes rendus des séances, p. 25).
267. Sur une question relative aux congruences de sphères (*Bull. Soc. math. France*, t. 62, Comptes rendus des séances, p. 25).
268. L'œuvre scientifique de Paul Painlevé (*Rev. Métaph. et Mor.*).
269. Un terme à effacer de l'enseignement mathématique « Effectuer » (*Enseign. scient.*).
270. Réponse à l'enquête sur les bases de l'enseignement mathématique (*Enseign. scient.*).
271. La non-résolubilité de l'équation du cinquième degré (*Enseign. scient.*).
272. Un cas simple de diffusion des ondes (*Rec. Math. Moscou*, t. 41, p. 402-407).

1935.

273. Polynomes linéaires adjoints (*Enseign. scient.*).
274. Réponse à l'enquête sur l'enseignement de la Mécanique (*Enseign. scient.*).
275. Les développables circonscrites à la sphère (*Enseign. scient.*).
276. La théorie des équations du premier degré (*Enseign. scient.*).
277. Extrait d'une lettre à M. T. Kubota (*Tôhoku Journ.*, t. 40, p. 198).
278. Les conditions définies dans les problèmes aux dérivées partielles (Généralités des cas hyperboliques, Conférences d'introduction à la réunion mathématique tenue à l'Université de Genève, 17 à 29 juin).
279. Les caustiques des enveloppes à deux paramètres (*Journ. Math.*, volume publié en hommage à M. Goursat).
280. Un problème topologique sur les équations différentielles (*Prace Matematyczno Fizyczne*, t. 44, volume en hommage à la mémoire de Lichtenstein).

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

Calcul des variations et calcul fonctionnel.

Géométrie.

Hydrodynamique.

102090. Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augu